Université Joseph Fourier
Année universitaire 2014/2015

L3 - Parcours A

EXAMEN GGMAT36e

16 juin 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de Mittag-Leffler.
2. Enoncer le théorème de la représentation conforme de Riemann.

Exercice 2 On se donne des nombres complexes $a_0, \dots, a_n$ avec $a_n = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n$. Dans tout l'exercice, $R > 0$ est choisi suffisamment grand pour que le disque ouvert $D(0, R)$ contienne tous les zéros de P. On note γ_R un lacet parcourant le cercle de centre 0 et de rayon R dans le sens positif, et

$$F_R(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_R} \frac{e^{wz}}{P(w)} \mathrm{d}w.$$

1. Soit $m(R) = \inf\{|P(w)| \ ; \ w \in C(0, R)\}$, où $C(0, R)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R. Montrer que $m(R) > 0$.
2. Montrer que pour tout complexe w de module R et tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^{wz}| \leq e^{R|z|}$.
3. Montrer que F_R est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et exprimer les dérivées successives $F_R^{(k)}(z)$ à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire que $a_0 F_R + a_1 F_R' + \dots + a_n F_R^{(n)} = 0$.
5. Montrer que F_R ne dépend pas de R. Indication : on pourra utiliser le théorème des résidus ou la théorie de Cauchy globale. On notera donc $F = F_R$.
6. Soit $n \geq 2$. Déduire de 5. que $F(0) = \dots = F^{(n-2)}(0) = 0$ et que $F^{(n-1)}(0) = 1$.

   Indication : on pourra faire tendre R vers l'infini.
7. Dans le cas où P a n racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, donner une autre expression de $F(z)$ à l'aide de la formule des résidus (on explicitera la valeur des résidus).

Exercice 3

Soit D un domaine (c.à.d. un ouvert connexe) borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\bar{D}$ et holomorphe sur D. On suppose également que f ne possède pas de zéro.

1. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(z)| = c$ pour tout $z \in \partial D$. Montrer que f est constante sur D.

T.S.V.P.

2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'assertion dans 1. est fausse si l'on enlève l'hypothèse que f ne possède pas de zéro.

3. Pourquoi l'assertion de 1. n'est pas en contradiction avec l'exemple

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}, \quad f(x+iy) = e^{ix} \quad ?$$

Exercice 4

Soit D le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et $\mathbb{H}^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ qui sont holomorphes et *bornées*. On fixe également une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D non nuls et deux à deux distincts. Enfin, si f est holomorphe sur D, on note $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence des deux propriétés suivantes:

$$\text{Il existe une fonction } f \text{ dans } \mathbb{H}^\infty(D) \text{ telle que } Z(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{P1}$$

$$\text{La série } \sum (1 - |a_n|) \text{ est convergente.} \tag{P2}$$

1. Pour $a \in D$, on considère l'application homographique $\Phi_a : \bar{D} \to \mathbb{C}$, $\Phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
   (a) Montrer que Φ_a est continue sur $\bar{D}$ et holomorphe sur D.
   (b) Montrer que $|\Phi_a(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial D$.
   (c) Montrer que $|\Phi_a(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.

2. On suppose que (P1) soit vérifiée par une certaine fonction $f \in \mathbb{H}^\infty(D)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction f_N holomorphe sur D telle que $f(z) = (z-a_0)(z-a_1)...(z-a_n)f_N(z)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_N(z) = \prod_{n=0}^N \Phi_{a_n}(z)$.
      i. Montrer que la fonction f/B_N est bien définie et holomorphe sur D.
      ii. On note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in D\}$. Déduire de i. que pour tout $r \in [0, 1[$,

$$\frac{|f(0)|}{|B_N(0)|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\inf\{|B_N(z)|;\ |z| = r\}}.$$

   (c) En utilisant 2.(b) et 1.(b), montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \prod_{n=0}^{N} |a_n| \geq \delta.$$

   (d) En utilisant un théorème du cours, montrer que (P2) est vérifiée.

3. On suppose que (P2) est vérifiée.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $b_n : \bar{D} \to \mathbb{C}$ par $b_n(z) = -\frac{|a_n|}{a_n}\Phi_{a_n}(z)$. Montrer qu'on a

$$1 - b_n(z) = \frac{1-|a_n|}{1-\bar{a_n}z}\left(1 + \frac{|a_n|}{a_n}z\right),$$

   et en déduire que si $z \in D$, alors

$$|1 - b_n(z)| \leq 2\frac{1-|a_n|}{1-|z|}.$$

   (b) Déterminer $Z(b_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que (P1) est vérifiée en utilisant un produit infini.