Université Joseph Fourier
Année universitaire 2013/2014

L3 - Parcours A

EXAMEN GGMAT36e

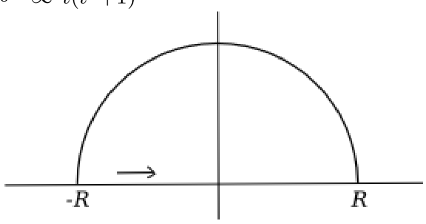
17 juin 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Autour du cours)

1. Enoncer les inégalités de Cauchy.
2. Soit f une fonction entière telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ avec
$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Montrer que f est un polynôme. Expliquer pourquoi le théorème de Liouville est un cas particulier de ce résultat.
3. Enoncer le théorème de d'Alembert et le démontrer à l'aide du théorème de Liouville.

Exercice 2
Justifier la convergence de l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+1)} dt$$
et calculer sa valeur.
Indication : On pourra utiliser $I = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t(t^2+1)} dt$ et intégrer le long du chemin indiqué.



Exercice 3
Dans les exemples suivants déterminer le type de singularité en $z_0 = 0$. S'il s'agit d'une singularité illusoire, déterminer la limite quand $z \to 0$. Dans les autres cas, déterminer la série de Laurent autour de 0.

1. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^5}$,
2. $f(z) = z^n e^{1/z}$,
3. $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{Log}(1+z)}$ (ici $\mathrm{Log}(1+z)$ est la détermination principale du logarithme).

T.S.V.P.

Exercice 4

Soit f une fonction entière telle qu'il existe trois nombres réels a, b, c, $a - ib \neq 0$ avec

$$a\mathrm{Re}f(z) + b\mathrm{Im}f(z) \leq c, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 5

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Est-ce qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier votre réponse.

Exercice 6

Soient $0 < r_1 < r_2$ des réels positifs. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant la couronne $\{z \in \mathbb{C},\, r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. On note pour $r_1 \leq r \leq r_2$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Soient $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le principe du maximum à la fonction $z \mapsto z^p f(z)^q$, montrer que

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^p M(r)^q \leq \max(r_1^p M(r_1)^q, r_2^p M(r_2)^q).$$

2. En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^\alpha M(r) \leq \max(r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)).$$

   (Indication : on pourra utiliser un argument de densité).

3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$. Calculer cet α et déduire l'inégalité

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\ln(r_2)-\ln(r)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}} M(r_2)^{\frac{\ln(r)-\ln(r_1)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}}.$$