Université Joseph Fourier — L3 - Parcours A
Année universitaire 2013/2014

EXAMEN GGMAT36e

21 mai 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

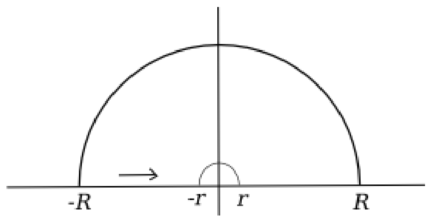
Exercice 1 (Questions de cours)

1. Définir les notions de singularité illusoire, pôle et singularité essentielle.
2. Enoncer le théorème de Mittag-Leffler.

Exercice 2
Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln^2 t}{t^2+1} dt$$

en intégrant le long du chemin indiqué.



Exercice 3
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est constante. (Indication : on pourra considérer $e^{-f(z)}$).

Exercice 4
Soit f une fonction holomorphe dans $D(0, R)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Pour $0 \leq r < R$, on pose

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

1. Montrer que $r \mapsto M_f(r)$ est une fonction croissante.
2. Montrer que, si f n'est pas constante, $r \mapsto M_f(r)$ est strictement croissante.
3. On suppose que f est un polynôme de degré n, et on pose $g(z) = z^n f(1/z)$. Ecrire explicitement g pour $f(z) = a_0 + ... + a_n z^n$. Quel est le lien entre $M_f(r)$ et $M_g(1/r)$? En déduire que la fonction $r \mapsto M_f(r)/r^n$ est strictement décroissante, sauf si f est de la forme az^n.
4. On suppose de plus que f est unitaire. Montrer que, si pour tout z de module 1, $|f(z)| \leq 1$, alors $f(z) = z^n$.

T.S.V.P.

Exercice 5 (Fonction zêta de Riemann)
Le but de cet exercice est l'étude de la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{dans} \quad \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re} z > 1\}.$$

1. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. En déduire que $\zeta(z)$ définit une fonction holomorphe dans $\mathcal{U}$.

2. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Montrer que le produit
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$$
converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. En déduire que
$$\widehat{\zeta}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$$
définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$.

3. Le but de cette partie est de démontrer que $\zeta(z) = \hat{\zeta}(z)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$. Soit $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. On pourra dans la suite utiliser l'égalité
$$\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} (p_k^{i_k})^{-s} \right) = \sum_{0 \le i_1, \ldots, i_m \le M} (p_1^{i_1} \ldots p_m^{i_m})^{-s}. \tag{1}$$
valable pour tous $m, M \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_{m_0} le plus grand nombre premier p_i et M_0 la plus grande des puissances i_k apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des N premiers entiers $1, \ldots, N$. Considérons $m \ge m_0$ et $M \ge M_0$. Montrer l'inégalité
$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} (p_k^{i_k})^{-s} \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s). \tag{2}$$

   (b) En faisant tendre M, puis m et ensuite N vers l'infini dans (2) conclure que $\zeta(s) = \widehat{\zeta}(s)$.

   (c) Montrer que $\zeta(z) = \widehat{\zeta}(z)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$.

.