Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen 22 juin 2012

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \sqrt{z}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.
   (b) Une fonction holomorphe est partout différentiable.
   (c) Une fonction méromorphe dont tout pôle éventuel est simple est holomorphe si et seulement si chaque résidu est zéro.
   (d) La fonction $u(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est harmonique.
2. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de z_0. Donner une condition suffisante pour que f soit conforme autour de z_0.
3. Énoncer le principe du maximum.
4. Montrer : si u est une fonction harmonique réelle dans un domaine D, alors, localement, u est la partie réelle d'une fonction holomorphe. Est-ce que cela reste vrai globalement ?

Exercices

1. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D. On suppose que f est non-constante et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. Montrer : $|f(z)|$ n'atteint pas son minimum dans D.
2. Soit
$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 \cdot (z^2 - 9)}.$$

(a) Déterminer toutes les singularités dans $\hat{\mathbf{C}}$ de la fonction f.

(b) Pour toute singularité discuter la nature (pôle, ordre du pôle, singularité apparente, essentielle).

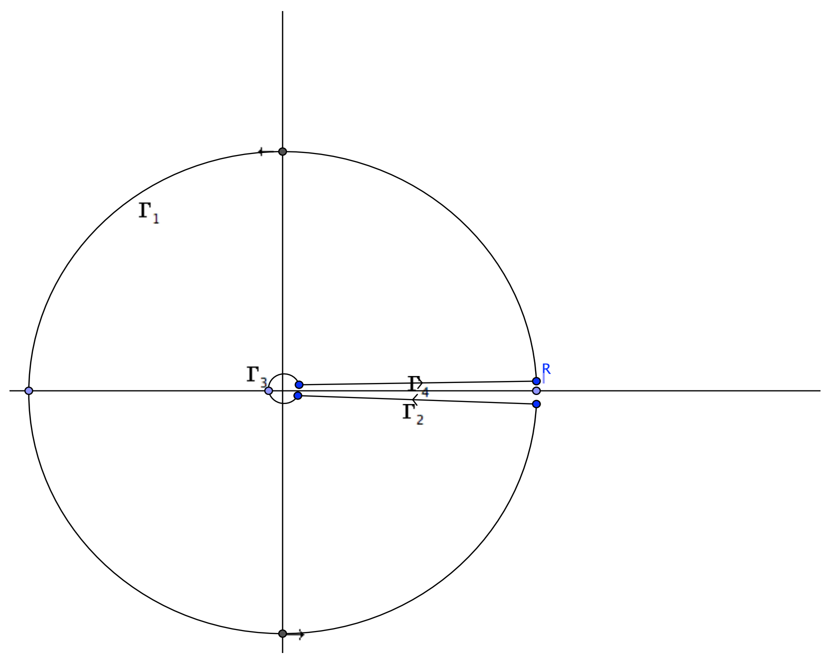
(c) Calculer le résidu en chaque singularité non essentielle.

(d) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f dz$ où $\gamma(t) = Re^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$, en fonction de R.

3. Soit $f(z) = z^p$, $p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ et $-1 < p < 1$. Pour cet exercice on utilisera la fonction argument Arg telle que $0 \leq \text{Arg} < 2\pi$.

   (a) Rappeler la définition de z^p dans le domaine $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

   On considère le contour Γ suivant :



Le chemin Γ_1 est un cercle incomplet de rayon R ; et Γ_3 est un cercle incomplet de rayon ϵ ; les chemins Γ_2 et Γ_4 sont les deux segments de rayon manquants, d'angles $2\pi - \eta$ et η. On pose

$$I_k := \int_{\Gamma_k} \frac{z^p}{1+z^2} dz.$$

(b) Montrer que $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$ et que $\lim_{\epsilon\to 0} I_3 = 0$.

(c) Déterminer la constante $C_p \in \mathbf{C}$ telle que $I_2 + I_4 \to C_p \int_\epsilon^R \frac{x^p}{1+x^2} dx$ lorsque l'angle η tend vers zéro. Attention : il faut justifier l'interversion de limite.

(d) Calculer les résidus en $\pm$i de $\frac{z^p}{1+z^2}$.

(e) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi p\right)}.$$