Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 14 mai 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) Une fonction holomorphe bornée dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est constante.
   (b) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$ telle que $\int_\gamma f dz = 0$ pour chaque lacet γ (supposé C^1 par morceaux) est holomorphe.
   (c) Si f non identiquement nulle est méromorphe, alors $1/f$ est aussi méromorphe.
   (d) Une fonction méromorphe dont tous les résidus sont 0 est entière.
2. Montrer : si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ telle que $f = g$ sur un segment $[z_1, z_2] \subset D$, $(z_1 \neq z_2)$ alors $f = g$.
3. Soit f une fonction méromorphe. Quand dit-on que f a un pôle, resp. une singularité essentielle au point ∞ ? Montrer que f est une fonction rationnelle si et seulement si f n'a pas une singularité essentielle en ∞.
4. Montrer : si f et g sont deux fonctions entières avec les mêmes zéros (avec multiplicités) alors il existe une fonction entière h telle que $f(z) = e^{h(z)} g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exercices

1. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f = u + \mathrm{i}v$ sur $\mathbb{C}$ ($u =$Re (f), $v =$Im (f)) telles que, écrivant $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels, on ait $u = ye^x \cos y + xe^x \sin y$.
2. Soit k un entier strictement positif. Soit
$$f(z) := \frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z-1)}{z^k(z-2)}.$$
   (a) Déterminer toutes les singularités dans $\hat{\mathbb{C}}$ de la fonction f.
   (b) Pour toute singularité discuter la nature (pôle, ordre du pôle, singularité apparente, essentielle).

   On suppose désormais $k = 3$.

   (c) Calculer le résidu de chaque singularité non essentielle.
   (d) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f dz$ où $\gamma(t) = Re^{2\pi \mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 1$ en fonction de R.
3. Soit $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + b^2}$ où b est un réel strictement positif.
   (a) Calculer les résidus de f aux 2 pôles de f.
   (b) Utiliser ce résultat pour montrer
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$
4. Soit $f = z^3 - 4z^2 + z + 12$.
   (a) Rappeler le théorème de Rouché.
   (b) Montrer que f a tous ses zéros dans le domaine $1 < |z| < 5$. Indication (comparer f avec deux fonctions convenables, e.g. une constante bien choisie ou bien la fonction $z^3 - 4z^2 + z - 4$.

Corrigé

Autour du cours

1. Vrai ou faux ?
   (a) NON. Par exemple z est borné sur $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \|z\| \leq 2\}$.
   (b) OUI, c'est le thm. de Morera.
   (c) OUI : une fonction méromorphe f est holomorphe ou a des pôles dans $\mathbb{C}$. Autour de chaque point $a \in \mathbb{C}$ le développement de Laurent (DdL) s'écrit $\sum_{k \geq k_0} a_k (z-a)^k$. Pour un pôle $k_0 < 0$, $a_{k_0} \neq 0$ et le DdL pour $1/f$ autour de a est
   $$(z-a)^{k_0} \frac{1}{a_{k_0} + a_{k_0+1} z + \cdots} = (z-a)^{k_0} \text{ série entière en } (z-a)$$
   donc un zéro d'ordre k_0 et de même, si f a une zéro d'ordre ℓ en $z = b$, $1/f$ a un pôle d'ordre ℓ en b.
   (d) NON, la fonction $\frac{1}{z^2}$ a un seul pôle en 0 de résidu 0.
2. Le segment S contient une point d'accumulation de S. Le théorème d'identité implique alors que $f = g$.
3. f a un pôle, resp. une singularité essentielle au point ∞ si $g(z) = f(1/z)$ a un pôle, resp. une singularité essentielle au point zéro.

   Si $f = \frac{p}{q}$, $\deg p = n$, $\deg q = m$, alors
   $$\frac{p(\frac{1}{z})}{q(\frac{1}{z})} = \frac{z^n p(\frac{1}{z})}{z^m q(\frac{1}{z})}$$
   où $z^n p(\frac{1}{z}) = P(z)$ et $z^m q(\frac{1}{z}) = Q(z)$ sont des polynômes en z de degrés n et m et donc $\frac{P}{Q}$ a un singularité apparente en 0 si $n \geq m$ et sinon un pôle d'ordre $m - n$.

   Réciproquement, on n'a au plus un nombre fini de pôles $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ car sinon, ∞ serait un point d'accumulation de pôles. Alors, on écrira $f(z) = h_k(z) + f_k(z)$ avec $f(z_k)$ holomorphe autour de a_k et $h_k(z)$ la partie polaire. Alors $\tilde{f} := f - h_1 - \cdots - h_n$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec au plus un pôle à l'infini. Or, si le DdL de $\tilde{f}$ autour de 0 est $\sum a_k z^k$, alors $\tilde{f}(\frac{1}{z}) = \sum a_k z^{-k}$ et cela étant un pôle, il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nulles. Conclusion : $\tilde{f}$ est un polynôme et donc

$$f = \text{polynôme } + \sum h_i = \text{polynôme } + \sum_k \text{ polynôme en } \frac{1}{(z - z_k)}$$

est une fonction rationnelle.

4. La fonction $s := f/g$ est entière est sans zéros. Alors aussi $1/s$ et s' sont entières et donc aussi $\frac{s'}{s}$. Soit son DdL $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. On a $s(0) \neq 0$ et on pose $s(0) = e^{b_0}$ et $h = b_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{c_{n-1}}{n} z^n$ qui satisfait $h' = s'$ par construction. Donc $(se^{-h})' = (s' - h')e^{-h} = 0$ et donc se^{-h} est constante $=s(0)e^{-b_0} = 1$ et donc $s = e^h$ avec h entier.

Exercices

1. On utilise les équations de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ pour montrer que $v = y \sin y e^x - e^x x \cos y + C$ et donc

   $$u+\mathrm{i}v = ye^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{i}xe^x(\cos y+\sin y)+\mathrm{i}C = -\mathrm{i}ze^z+\mathrm{i}C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. (a) On a les singularités $z = 0$, $z = 2$ et $z = \infty$.

   (b) Pour $z = 0$ un pôle d'ordre $k-1$ si $k \geq 2$, sinon une singularité apparente. Pour $z = 2$ un pôle d'ordre 1 et un singularité essentielle en $z = \infty$. Pour le dernier on remarque

   $$\frac{\sin(\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}(\frac{1}{z} - 1)}{(\frac{1}{z})^k(\frac{1}{z} - 2)} \sim \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(\frac{1}{z})^{k-1}} = z^{k-1}e^{\frac{1}{z}} = z^{k-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

   (c) On a $\mathrm{Res}(f, 2) = \lim_{z\to 2} \frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z-1)}{z^3} = \frac{1}{8} \cdot e^2 \sin(2)$. Si $k = 3$, on a

   $$\frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z - 1)}{z^3(z - 2)} = \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot e^z \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n\right)$$

   et pour $\mathrm{Res}(f, 0)$, on cherche le coefficient de z dans $\frac{\sin z}{z} \cdot e^z \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n\right)$ qui est $\frac{1}{4}$.

   (d) Par le théorème des résidues on a pour $0 < R < 2$ que l'intégrale vaut $-\frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ et si $R > 2$ on trouve $2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot e^2 \sin(2))$. Pour $R = 2$ l'intégrale n'est pas définie.

3. On a autour de $z = \mathrm{i}b$:

$$\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+b^2} = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}b)(z-\mathrm{i}b)} = \left(\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}} + \text{séries en } (z-b\mathrm{i})^2\right) \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}b}$$

et donc le résidu en $z = \mathrm{i}b$ est égal à $\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}$ et de même est égal à $-\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}$ en $z = -\mathrm{i}b$. Par un résultat du cours, ou par un calcul direct (il faut choisir un contour convenable et faire une estimation pour la partie qu'on souhaite faire aller vers l'infini) l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx =$ partie réelle de [$2\pi\mathrm{i}$ somme des résidues de $f(z)$ dans le demi-plan supérieur et donc, puisque f est paire, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}\right] = \pi \frac{e^{-b}}{2b}.$$

4. (a) Sur un domaine D borné d'un lacet γ, où f et g sont méromorphes sans singularités essentielles et $|f-g| < |g|$ lelong de γ, alors le nombre de zéros moins le nombre de pôles est le même pour f et pour g.

   (b) Si $|z| = 1$ avec $g = 12$ on a $|f-g| = |z||z^2-4z+1| \leq |z|^2+4|z|+1 = 6 < 12$ donc f n'a pas de zéros dans $D(0,1)$; si $|z| = 5$ avec $g = z^3 - 4z^2 + z - 4 = (z-4)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ on a $|f-g| = 16$ et $|g| > 1.4.4 = 16$ (ici on doit exclure l'égalité $|g| = 16$ par la remarque que si $|z| = R$ on a $|z-a| \geq ||z|-|a||$ avec égalité seulement si z et a sont alignés).

   On peut également prendre $g = z^3$ et remarquer que si $|z| = 5$ on a $|f-g| = |-4z^2+z-4| \leq 4.5^2+5+4 = 109 < |z|^3 = 125$.

   Donc f a exactement 3 zéros dans $D(0,5)$.