# Examen, session 2

**Mardi 21 juin 2016, durée : 3 heures**

*Documents, calculatrices et téléphones interdits.*
*Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.*
*Barême approximatif : exercice 1 sur 10 points ; exercice 2 sur 13 points.*

**Exercice 1.**
On se donne $\lambda, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}$ et on considère le système ("équation différentielle et condition initiale")

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} x'' = \lambda x^3, \\ x(0) = \underline{x}, \\ x'(0) = \underline{y}. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tous $T_+, T_- > 0$, $x \in \mathcal{C}^2([-T_-, T_+], \mathbb{R})$ est solution de $(S_\lambda)$ si et seulement si $X = (x, x') \in \mathcal{C}^1([-T_-, T_+], \mathbb{R}^2)$ est solution de

$$(T_\lambda) \quad \begin{cases} X' = F_\lambda(X), \\ X(0) = \underline{X}, \end{cases}$$

où

$$X = (X_1, X_2), \quad F_\lambda(X) = (X_2, \lambda X_1^3) \quad \text{et} \quad \underline{X} = (\underline{x}, \underline{y}).$$

2) Justifier qu'il existe une unique solution maximale $X \in \mathcal{C}^1(]-T_{\min}, T_{\max}[, \mathbb{R}^2)$ à $(T_\lambda)$ avec $T_{\min}, T_{\max} \in ]0, \infty]$. Dans toute la suite, on désigne cette solution maximale par $X = (X_1, X_2)$.

3) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}X_2(t)^2 - \frac{\lambda}{4}X_1(t)^4$ est constante sur $]-T_{\min}, T_{\max}[$.

4) Dans cette question, on suppose que $\lambda < 0$.
 a) Montrer que la solution $X$ est globale, *i.e.* $T_{\min} = T_{\max} = \infty$.
 b) Montrer que la seule solution stationnaire (ou équilibre) pour $(T_\lambda)$ est $X_{\text{eq}} = (0, 0)$. Après avoir donné la définition de ces notions, montrer que cet équilibre est stable (disons, pour $t \in [0, +\infty[$), mais pas asymptotiquement stable.

5) Dans ce qui suit, on suppose que $\lambda > 0$. On suppose de plus que $\underline{x} > 0$, $\underline{y} > 0$, et que la quantité $E := \frac{1}{2}\underline{y}^2 - \frac{\lambda}{4}\underline{x}^4$ est strictement positive.
 a) Montrer que pour tout $t \in ]-T_{\min}, T_{\max}[$, on a $X_2(t) \geq \sqrt{2E}$.
Ainsi, $X_1$ est strictement croissante. C'est donc un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]-T_{\min}, T_{\max}[$ sur $]x_{\min}, x_{\max}[$, pour un certain $x_{\min} \in [-\infty, \underline{x}[$ et un certain $x_{\max} \in ]\underline{x}, +\infty]$. On note $v$ son application réciproque.
 b) Montrer que pour tout $x \in ]x_{\min}, x_{\max}[$, on a $v'(x) = \dfrac{1}{(2E + \lambda x^4/2)^{1/2}}$.
 c) En déduire que

$$\forall t \in [0, T_{\max}[, \quad t = \int_{\underline{x}}^{X_1(t)} \frac{\mathrm{d}x}{(2E + \lambda x^4/2)^{1/2}},$$

puis que $X$ explose en temps fini, au sens où $T_{\max} < \infty$.

**Exercice 2.** Dans cet exercice, il est sous-entendu que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.
*Rappels : Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f} = \mathcal{F}f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Cela définit une application linéaire continue $\mathcal{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, qui s'étend en une application linéaire continue, encore notée $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Cette dernière est en fait une bijection telle que $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ est une isométrie, donc en particulier, $\mathcal{F}^{-1}$ est continue (de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$). Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f$ s'identifie (presque partout) à la fonction continue donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

*Lorsque $I$ est un intervalle, et $g \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}))$, on définit sa transformée de Fourier partielle $\widehat{g} = \mathcal{F}g \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}))$ par*

$$\forall t \in I, \quad \widehat{g}(t) = \mathcal{F}(g(t)).$$

*Enfin, pour tout $s \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$,*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid (1 + |\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

*C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire*

$$(f_1 \mid f_2)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \overline{\widehat{f_1}}(\xi)\widehat{f_2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Soit $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy suivant (associé à une équation de Schrödinger non-linéaire) :

$$(1) \qquad \begin{cases} i\partial_t\psi + \partial_x^2\psi = |\psi|^2\psi & (t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}), \\ \psi_{|t=0} = \varphi. \end{cases}$$

1) Soit $s \geq 0$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$. Montrer qu'en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_f(t) = S(t)f = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\cdot|^2}\widehat{f}\right),$$

a) on définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ une fonction $\psi_f(t)$ dans $H^s(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\psi_f(t)\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$, et que de plus, $\psi_f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ ;

b) si $s \geq 2$, on a aussi $\psi_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}))$, et $\psi_f$ est solution (au sens faible) du problème suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t\psi_f + \partial_x^2\psi_f = 0 & (\text{dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))), \\ {\psi_f}_{|t=0} = f. \end{cases}$$

*Indication : il pourra être utile de se souvenir que, lorsque $\xi, h \in \mathbb{R}$ et $F(h) = \exp(-it|\xi|^2)$, on a $|F(h) - F(0) - F'(0)h| = |h|\left|\int_0^1 F'(rh)\,\mathrm{d}r - F'(0)\right| \leq 2|h|\xi^2$.*

2) Montrer que si $s > 1/2$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{H^s}.$$

3) On rappelle qu'une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$, encore notée $\|\cdot\|_{H^1}$, est donnée par

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}.$$

Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\forall f_1, f_2 \in H^1(\mathbb{R}), \quad f_1 f_2 \in H^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f_1 f_2\|_{H^1} \leq C_1 \|f_1\|_{H^1} \|f_2\|_{H^1}.$$

*Indication : on pourra commencer par le cas où $f_1$ et $f_2$ sont dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, ainsi que leurs dérivées, puis utiliser la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$.*

En déduire que, si $I$ est un intervalle et $g \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}))$, alors $|g|^2 g \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}))$, et

$$\forall t \in I, \| |g(t)|^2 g(t) \|_{H^1} \leq C_1^2 \|g(t)\|_{H^1}^3.$$

4) Montrer que pour tous $T > 0$ et $\psi \in \mathcal{C}([0,T], H^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}))$, si $\psi$ vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad \psi(t) = S(t)\varphi - i \int_0^t S(t-t')(|\psi(t')|^2 \psi(t'))\, \mathrm{d}t', \tag{2}$$

alors $\psi$ est solution de (1) (on pourra utiliser sans démonstration que si $g \in \mathcal{C}([0,T], H^2(\mathbb{R}))$, alors pour tout $t \in [0,T]$, $\partial_x^2 \int_0^t g(t')\, \mathrm{d}t' = \int_0^t \partial_x^2 g(t')\, \mathrm{d}t'$).

5) Montrer que pour tout $R > 0$, lorsque $\|\varphi\|_{H^1} \leq R$, il existe $T > 0$ tel que (2) ait une solution $\psi \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ (on pourra utiliser un argument de point fixe dans la boule fermée $B(0, R+1)$ de $\mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$). On notera que $T$ peut être choisi en fonction de $R$ seulement (et pas de $\varphi$).

On admettra que $\psi$ appartient en fait à $\mathcal{C}([0,T], H^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}))$.

6) Montrer, pour tout $T > 0$, l'unicité dans $\mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ de la solution de (2) (si $\psi_1$, $\psi_2$ sont deux telles solutions, on pourra montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|(\psi_2 - \psi_1)(t)\|_{H1} \leq C_1^2 \sup_{t' \in [0,T]} \left( \|\psi_1(t')\|_{H1} + \|\psi_2(t')\|_{H1} \right)^2 \int_0^t \|(\psi_2 - \psi_1)(t')\|_{H1} \mathrm{d}t',$$

et utiliser un lemme de Gronwall qu'on énoncera et démontrera).

Cela permet de définir une unique solution maximale $\psi \in \mathcal{C}([0, T_\star[, H^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0, T_\star[, L^2(\mathbb{R}))$ de (1), pour un certain $T_\star \in ]0, +\infty]$. C'est cette solution qu'on considère à présent.

7) Montrer qu'on a, pour tout $t \in [0, T_\star[$ :

$$\mathrm{Re} \left( \partial_x^2 \psi(t)\, \overline{\partial_t \psi(t)} \right) = \mathrm{Re} \left( |\psi(t)|^2 \psi(t)\, \overline{\partial_t \psi(t)} \right) \quad \text{(égalité presque partout sur } \mathbb{R}\text{)},$$

et

$$\mathrm{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(t,x)}\, \partial_t \psi(t,x)\, \mathrm{d}x \right) = 0.$$

8) On admettra que les relations de la question précédente impliquent que les fonctions

$$t \mapsto \|\psi(t)\|_{L^2} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{1}{2} \|\partial_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\psi(t)\|_{L^4}^4$$

sont constantes sur $[0, T_\star[$. En déduire que $T_\star = +\infty$.