Ex1

1°) Si on a (S_λ) $\begin{cases} x'' = \lambda x^3 \\ x(0) = \underline{x} \\ y(0) = \underline{y} \end{cases}$ avec $x \in C^2([-T_-, T_+], \mathbb{R})$,

en posant $X = (x, x')$, $X \in C^1([\,], \mathbb{R}^2)$ et on a $(T_\lambda) \begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = \lambda X_1^3 \\ X(0) = (\underline{x}, \underline{y}) \end{cases}$.

Si $X \in C^1$ est sol. de (T_λ), $x := X_1 \in C^1$, et $x' = X_1' = X_2 \in C^1$, ($\Rightarrow X = (x, x')$)
donc $x \in C^2$,
et $x'' = X_2' = \lambda X_1^3 = \lambda x^3$; de plus, $(x(0), x'(0)) = X(0) = (\underline{x}, \underline{y})$.

2°) On applique Cauchy-Lipschitz, car $F_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(X_1, X_2) \mapsto (X_2, \lambda X_1^3)$ est C^∞, donc loc^t lip.
On a ainsi une unique sol maximale $X \in C^1(]-T_{min}, T_{max}[, \mathbb{R}^2)$ à (T_λ).

3°) Avec $E := \frac{1}{2} X_2^2 - \frac{\lambda}{4} X_1^4 \in C^1(]-T_{min}, T_{max}[, \mathbb{R})$, on a :

$$E' = X_2 \underbrace{X_2'}_{\lambda X_1^3} - \lambda X_1^3 \underbrace{X_1'}_{X_2} = 0,$$ donc E est cste.

4°) On suppose $\lambda < 0$.

a) Par 3°), $|X_2| \le \sqrt{2E(0)}$ et $|X_1| \le \left(-\frac{4}{\lambda} E(0)\right)^{1/4}$,
donc X ne peut pas exploser en tps fini (critère d'explosion en dim finie),
si bien que $T_{min} = T_{max} = +\infty$.

b) Si X stationnaire, $0 = (X_1', X_2') = (X_2, \lambda X_1^3) \overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} X_2 = X_1 = 0$.
(et $X = (0,0)$ est bien un équilibre).

Stabilité de $X_{eq}^{\in \mathbb{R}^2}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$

$|X(0) - X_{eq}| \leq \eta \Rightarrow X$ sol globale (ou $\mathbb{R}$) et $\forall t \geq 0, |X(t) - X_{eq}| \leq \varepsilon.$

Ici, il suffit de montrer que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |(x_0, y_0)| \leq \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, |x(t)| \leq \varepsilon.$

Mais $\sup_{t \geq 0} |x(t)| \xrightarrow[E(0) \to 0]{} 0$ par le calcul de 4) a),

et $E(0) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{\lambda}{4} x^4 \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$, d'où la conclusion voulue.

(on peut m. faire un choix explicite de η en fct de ε ...)

Stabilité asymptotique de X_{eq} :
stabilité, et $\exists \eta_0 > 0, |X(0) - X_{eq}| \leq \eta_0 \Rightarrow X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} X_{eq}.$

Mais ici, cela impliquerait $E(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, impossible si $X(0) \neq (0,0)$.

5) a) Par 3), $\forall t \in]-T_{min}, T_{max}[, X_2(t)^2 = 2E + \frac{\lambda}{2} X_1(t)^4 \geq 2E > 0.$

Ainsi, $\forall t \in]-T_{min}, T_{max}[, (X_2(t) \geq \sqrt{2E}$ ou $X_2(t) \leq -\sqrt{2E}).$

Mais $X_2(0) > 0$ et X_2 est continue.

Par valeurs interm., on a nécessairement $X_2 \geq \sqrt{2E}$.

(Donc $\forall t \in]..[, X_1'(t) = X_2(t) \geq \sqrt{2E} > 0$: X_1 est un C^1-difféo de $]-T_{min}, T_{max}[$ sur $]x_{min}, x_{max}[$
$x_{min} \in [-\infty, x[$, $x_{max} \in]x, +\infty]$.)

b) Avec v l'appli. réciproque de X_1 :

$\forall x \in]x_{min}, x_{max}[, (X_1 \circ v)(x) = x.$

On dérive :

$\forall x \in \dots,\quad \underbrace{X_1'(\nu(x))}_{X_2} \times \nu'(x) = 1,$

et on se souvient que $\forall t \in \dots,\ X_2(t)^2 = 2E + \frac{\lambda}{2} X_1(t)^4$
et $X_2(t) > 0$,
donc $X_2(t) = \sqrt{2E + \lambda X_1(t)^4/2}$

si bien que :

$\forall x \in \dots,\quad \nu'(x)\sqrt{2E + \lambda x^4/2} = 1.$

c) lorsque $t \in [0, T_{max}[$, on intègre ν' entre x et $X_2(t)$:

$$t = \nu(X_1(t)) - \cancel{\nu(x)}^{\geq 0} = \int_x^{X_1(t)} \frac{dx}{(2E + \lambda x^4/2)^{1/2}}$$

$$\underset{0 < x \leq X_2(t)}{\leq} \int_0^{+\infty} \text{———} < \infty \text{ car}$$

$$(2E + \lambda x^4/2)^{1/2} \underset{x \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, x^2.$$

Donc $T_{max} = \sup\{t \in [0, T_{max}[\} \leq \int_0^\infty \dots < \infty$,
et il y a explosion de X en temps fini.

Ex 2

1) Pour tout $t \geq 0$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$, $\underset{(\text{noté } uf)}{S(t)f} := \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\cdot|^2}\hat{f}\right)$.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-it|\cdot|^2}\hat{f}$ est mesurable, et dans $L^2(\mathbb{R})$, car son module vaut $|\hat{f}|$, de carré intégrable.
Alors $S(t)f$ est bien défini, comme élément de $L^2(\mathbb{R})$.
De plus,

$$\|S(t)f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{S(t)f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_{H^s}^2,$$

donc $S(t)f \in H^s(\mathbb{R})$ et $\|S(t)f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$.

Si $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\|S(t)f - S(t')f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s\left|e^{-it|\xi|^2} - e^{-it'|\xi|^2}\right|^2|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

La fonction sous l'intégrale est dominée par $4(1+|\cdot|^2)^s|\hat{f}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $(1+|\xi|^2)^s|\dots|^2|\hat{f}(\xi)|^2 \xrightarrow[t' \to t]{} 0$,
donc par convergence dominée, $\|S(t)f - S(t')f\|_{H^s} \xrightarrow[t' \to t]{} 0$;
d'où $t \mapsto S(t)f \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$.

(On suppose $s \geq 2$.) Ainsi, $S(t)f \in H^2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{F}\left(\partial_x^2(S(t)f)\right)(\xi) = -\xi^2\,\widehat{S(t)f}(\xi) = -|\xi|^2 e^{-it|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$

b) ~~Si~~ $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, la quantité $\boxed{\text{comme précédemment, } t \mapsto \partial_x^2 S(t)f \in C(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}))}$

$$\left\|\frac{1}{h}\left(S(t+h)f - S(t)f\right) - i\partial_x^2(S(t)f)\right\|_{H^{s-2}}^2 = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{h^2}\left|e^{-ih|\xi|^2} - 1 + ih|\xi|^2\right|^2(1+|\xi|^2)^{s-2}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

~~tend~~ tend vers 0 quand h tend vers 0, à nouveau par convergence dominée, grâce à la majoration $\left|e^{-ih|\xi|^2} - 1\right| \leq 2|h|\xi^2$ (accroissements finis), qui fournit la domination

$$\frac{1}{h^2}\left|e^{-ih|\xi|^2} - 1 + ih|\xi|^2\right|^2(1+|\xi|^2)^{s-2}|\hat{f}(\xi)|^2 \leq 4\xi^2(1+\xi^2)^{s-2}|\hat{f}(\xi)|^2 \leq 4(1+\xi^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2$$

La limite est nulle car à $\xi \in \mathbb{R}$ fixée, $e^{-ih|\xi|^2} - (1 - ih\xi^2) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\underset{t \mapsto S(t)f =: \varphi_f(t)}{\mathbb{R} \to H^{s-2}}$ est dérivable, et $i\partial_t \varphi_f = -\partial_x^2 \varphi_f$ $(\in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})))$.

2°) Lorsque $s > 1/2$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s/2} (1+\xi^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2}}_{<\infty \text{ car } (1+|\xi|^2)^{-s} \underset{\xi\to\infty}{\sim} |\xi|^{-2s} \text{ et } 2s>1} \|f\|_{H^s} \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ est donné sous forme intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^1} \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2}}_{\text{noté } C} \|f\|_{H^s} \quad \text{par ce qui précède}$$

3°) Si $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$, et

$$\|f_1 f_2\|_{H^1} \leq \|f_1 f_2\|_{L^2} + \|f_1' f_2\|_{L^2} + \|f_1 f_2'\|_{L^2} \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\leq \|f_1\|_{L^\infty} \|f_2\|_{L^2} + \|f_1'\|_{L^2} \|f_2\|_{L^\infty} + \|f_1\|_{L^\infty} \|f_2'\|_{L^2}$$

$$\leq \underbrace{3C}_{C_1} \|f_1\|_{H^1} \|f_2\|_{H^1} \quad \text{par 2°) et par } \|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}.$$

Si $f_1, f_2 \in H^1(\mathbb{R})$, on choisit des suites de fonctions $f_1^{(k)}, f_2^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergeant dans $H^1(\mathbb{R})$ vers f_1 et f_2, respectivement.

Mais alors, pour $j = 1, 2$, $\|f_j - f_j^{(k)}\|_{H^1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\|f_j - f_j^{(k)}\|_{L^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f_j' - f_j^{(k)\prime}\|_{L^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\|f_j^{(k)}\|_{L^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|f_j\|_{L^2}$ et $\|f_j^{(k)\prime}\|_{L^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|f_j'\|_{L^2}$ (par la 2ème inégalité triangulaire).

On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente.

Lorsque $g \in C(I, H^1(\mathbb{R}))$ et $t, t' \in I$, on a (considérant t fixé, et $t' \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ — ou $[t-\varepsilon, t]$ si $t = \sup I$ —, notant $M = \sup_{t' \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]} (\|g(t')\|_{H^1})$) :

$$\|\overbrace{|g(t)|^2 g(t)}^{= g(t)^2 \overline{g(t)}} - |g(t')|^2 g(t')\|_{H^1} \leq \|(g(t)-g(t'))|g(t)|^2\|_{H^1} + \|g(t')(g(t)-g(t'))\overline{g(t)}\|_{H^1}$$
$$+ \|g(t')^2(\overline{g(t)} - \overline{g(t')})\|_{H^1}$$
$$\leq 3C_1^2 M^2 \|g(t)-g(t')\|_{H^1} \xrightarrow[t' \to t]{} 0,$$

donc $|g|^2 g \in C(I, H^1(\mathbb{R}))$, et on a la majoration immédiate
$$\forall t \in I, \quad \||g(t)|^2 g(t)\|_{H^1} \leq C_1^2 \|g(t)\|_{H^1}^3.$$

4°) Soit $T>0$ et $\varphi \in C([0,T], H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ vérifiant

(*) $$\forall t \in [0,T], \quad \varphi(t) = S(t)\varphi - i\int_0^t S(t-t')(|\varphi(t')|^2\varphi(t'))\,dt'.$$

D'après 1°), $t \mapsto S(t)\varphi$
pour tout t', et $t \mapsto S(t-t')(|\varphi(t')|^2\varphi(t')) = S(t)\big[S(-t')\overbrace{(|\varphi(t')|^2\varphi(t'))}^{\in H^1(\mathbb{R}) \text{ par } 3°)}\big]$
sont de classe C^1 de $[0,T]$ dans $L^2(\mathbb{R})$,

et en dérivant, on a :
$$\partial_t\varphi(t) = i\partial_x^2(S(t)\varphi) - i\overbrace{S(0)}^{= Id}(|\varphi(t)|^2\varphi(t))$$
$$- i\int_0^t i\partial_x^2\big[S(t)S(-t')(|\varphi(t')|^2\varphi(t'))\big]\,dt'$$
$$= i\partial_x^2\varphi(t) - i|\varphi(t)|^2\varphi(t).$$

5°) La relation (*) exprime que φ est un point fixe pour l'application
$$\mathcal{T}_T : C([0,T], H^1(\mathbb{R})) \longrightarrow C([0,T], H^1(\mathbb{R}))$$
(bien définie, par 3°))
$$\varphi \longmapsto \Big(t \mapsto S(t)\varphi - i\int_0^t S(t-t')(|\varphi(t')|^2\varphi(t'))\,dt'\Big)$$

Soit $R>0$. On suppose $\|\varphi\|_{H^1} \leq R$.
On va vérifier que, pour $T>0$ assez petit, $\mathcal{T}_T$ envoie la boule fermée $\overline{B}(0, R+1)$ dans elle-même, et y est contractante.

Soit $\varphi \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ tel que $\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_{H^1} \leq R$.

Alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|(\mathcal{C}_T \varphi)(t)\|_{H^1} \leq \underbrace{\|S(t)\varphi\|_{H^1}}_{=\|\varphi\|_{H^1}} + \int_0^t \underbrace{\|S(t-t')(|\varphi(t')|^2\varphi(t'))\|_{H^1}}_{=\||\varphi(t')|^2\varphi(t')\|_{H^1} \leq C_1^2 \|\varphi(t')\|_{H^1}^3} dt$$

$$\leq R + C_1^2 (R+1)^3 T,$$

quantité inférieure ou égale à $R+1$ dès que $0 < T \leq 1/C_1^2(R+1)^3$

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{B}(0,R+1)$, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\|(\mathcal{C}_T\varphi_2)(t) - (\mathcal{C}_T\varphi_1)(t)\|_{H^1} \leq \int_0^t \|S(t-t')(|\varphi_2(t')|^2\varphi_2(t') - |\varphi_1(t')|^2\varphi_1(t'))\|_{H^1} dt'$$

$$\leq 3C_1^2(R+1)^2 T \sup_{t'\in[0,T]} \|\varphi_2(t') - \varphi_1(t')\|_{H^1}$$ d'après le calcul de 3°),

donc $\mathcal{C}_T$ est contractante sur $\overline{B}(0,R+1)$ dès que $0 < T < \frac{1}{3C_1^2(R+1)^2}$.

En choisissant $T \in \left]0, \min\left(\frac{1}{C_1^2(R+1)^3}, \frac{1}{3C_1^2(R+1)^2}\right)\right[$,
on peut appliquer le théorème de point fixe de Banach, et on obtient une solution φ de $(*)$ (unique dans $\overline{B}_{C([0,T],H^1)}(0,R+1)$)

6) Soit $T>0$ et φ_1, φ_2 deux solutions de $(*)$.

On reprend le calcul de 3°):

$$\||\varphi_2(t')|^2\varphi_2(t') - |\varphi_1(t')|^2\varphi_1(t')\|_{H^1} \leq C_1^2 \Big(\overbrace{\|\varphi_2(t')\|_{H^1}^2 + \|\varphi_2(t')\|_{H^1}\|\varphi_1(t')\|_{H^1} + \|\varphi_1(t')\|_{H^1}^2}^{\leq (\|\varphi_2(t')\|_{H^1} + \|\varphi_1(t')\|_{H^1})^2}\Big) \times \|\varphi_2(t') - \varphi_1(t')\|_{H^1}$$

$$\leq C_1^2 \sup_{t\in[0,T]} (\|\varphi_2(t)\|_{H^1} + \|\varphi_1(t)\|_{H^1})^2 \|\varphi_2(t') - \varphi_1(t')\|_{H^1}$$

si bien que, avec $\phi(t) = \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\|_{H^1}$, on a $\phi \in C([0,T], \mathbb{R}_+)$, et:

$\forall t\in[0,T]$, $\phi(t) \leq M\int^t \phi(t')dt'$ (où $M = C_1^2 \sup_{[0,T]} (\|\varphi_2\|_{H^1} + \|\varphi_1\|_{H^1})^2$)

Par le lemme de Gronwall, on en déduit $\phi = 0$.

En effet, posant $h(t) := \int_0^t \phi(t')dt'$, on a $h \in C^1([0,T],\mathbb{R})$, et $\forall t \in [0,T]$, $h'(t) \leq M h(t)$.

Par intégration, on en déduit $h(t) \leq e^{Mt} h(0) = 0$,
et $0 \leq \phi(t) \leq M h(t) = 0$.

7) Si $\varphi \in C([0,T_*[, H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T_*[, L^2(\mathbb{R}))$ est solution de (1) alors on a dans $C([0,T_*[, L^2(\mathbb{R}))$ (donc pour tout $t \in [0,T_*[$, et presque tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$(**) \qquad i\,\partial_t \varphi(t) + \partial_x^2 \varphi(t) = |\varphi(t)|^2 \varphi(t).$$

Multipliant par $\overline{\varphi(t)}$ et prenant la partie imaginaire, on a

$$\mathrm{Re}\left(\overline{\varphi(t)}\,\partial_t \varphi(t)\right) + \mathrm{Im}\left(\overline{\varphi(t)}\,\partial_x^2 \varphi(t)\right) = 0.$$

On intègre alors en x (cela commute avec Re et Im, et chaque terme, produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$, est intégrable) ; on obtient

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t,x)}\,\partial_t \varphi(t,x)\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t,x)}\,\partial_x^2 \varphi(t,x)\,dx\right).$$

Mais on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t,x)}\,\partial_x^2 \varphi(t,x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} |\partial_x \varphi(t,x)|^2\,dx$

(cette intégration par parties étant justifiée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis par densité, ou en utilisant Parseval et la caractérisation $\partial_x \varphi(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(i\xi\,\hat{\varphi}(t,\xi)\right)$).

Ce dernier terme est donc réel, d'où

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t,x)}\,\partial_t \varphi(t,x)\,dx\right) = 0.$$

On admet que cette quantité est en fait $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\cdot,x)|^2\,dx\right)$ si bien que $t \longmapsto \|\varphi(t)\|_{L^2}$ est constante sur $[0,T^*[$.

Plus simplement, multiplier (**) par $\partial_t \varphi(t)$ et prendre la partie réelle donne

$$\mathrm{Re}\left(\partial_x^2 \varphi(t)\,\partial_t \overline{\varphi(t)}\right) = \mathrm{Re}\left(|\varphi(t)|^2 \varphi(t)\,\partial_t \overline{\varphi(t)}\right)$$

(au sens : presque partout en $x \in \mathbb{R}$).

À nouveau, on peut intégrer cette relation sur $\mathbb{R}$, intégrer $\partial_x^2\psi\, \partial_t\overline{\psi}$ par parties, et constater que cela fournit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\partial_x\psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\psi\|_{L^4}^4\right) = 0$,

si bien que $t \longmapsto \frac{1}{2}\|\partial_x\psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\psi(t)\|_{L^4}^4$ est constante sur $[0, T_*[$

8°) Ainsi, la quantité $\|\psi(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\psi(t)\|_{L^4}^4$ est indépendante de $t \in [0, T_*[$: elle est donnée par sa valeur à $t=0$, ~~et~~ $\psi(0) = \varphi$. Mais elle est supérieure ou égale à $\|\psi(t)\|_{H^1}^2$. On en déduit qu'il existe $R>0$ (par exemple $R^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L^4}^4 + 1$) tel que pour tout $t \in [0, T_*[$, $\|\psi(t)\|_{H^1} \leq R$.

Par la question 5°) (et l'unicité de 6°)), on sait qu'il existe $T>0$, fonction de R seulement, tel que, prenant $\psi(t)$ pour donnée initiale, on peut prolonger ψ comme solution de (1) sur $[t, t+T]$. Ainsi, T_* ne peut être fini (sinon, prenant $t = \max(T_* - T/2, 0)$, on obtiendrait une contradiction : le prolongement de ψ après T_*). Donc $T_* = +\infty$.