Master de Mathématiques — Université J. Fourier
MAT4117 – EDO et EDP — 2015-2016

Examen, session 1

Mardi 5 janvier 2015, durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême approximatif : exercice 1 sur 6 points ; exercice 2 sur 14 points.

Exercice 1.
L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot \mid \cdot)$. On note $|\cdot|$ la norme associée. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne vérifiant, pour un $\alpha > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (f(y) - f(x) \mid y - x) \geq \alpha |y - x|^2.$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même.
1) Montrer que f est injective.
2) On montre ici que 0 est dans l'image de f.
a) Soit x et y deux solutions de l'équation différentielle $z' = -f(z)$ sur l'intervalle $[0, T]$, pour un $T > 0$. Montrer que

$$\forall t \in [0, T], \quad |y(t) - x(t)| \leq |y(0) - x(0)|\, e^{-\alpha t}.$$

b) Dans la suite, x désigne la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= -f(x), \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $]T_-, T_+[$ son intervalle de définition (avec $T_-, T_+ \in]0, +\infty[$). En appliquant a) à x et à $t \mapsto x(t + h)$ avec $|h|$ assez petit, montrer que

$$\forall t \in [0, T_+[, \quad |x'(t)| \leq |x'(0)|\, e^{-\alpha t}.$$

c) Montrer que x est bornée sur $[0, T_+[$, et que $T_+ = +\infty$.
d) Montrer que $x(t)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^d$ lorsque t tend vers $+\infty$, et que $f(\ell) = 0$.
3) Montrer que f est surjective.
4) Montrer que l'application réciproque de f vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(x)| \leq \alpha^{-1} |y - x|,$$

et conclure.

Exercice 2.
On étudie ici le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = -u^3 \qquad (t, x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, et aussi $\hat{f} = \mathcal{F} f$.

1) a) Donner la définition de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ et de sa norme $\|\cdot\|_{H^s}$, pour $s \geq 0$.

b) Soit $s > 1/2$. Montrer que que si $f \in H^s(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et montrer que $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte continument dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

c) On rappelle que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = (\hat{f} \star \hat{g})(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi - \eta)\,\mathrm{d}\eta$, et on rappelle l'inégalité de Young suivante :

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}), \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\varphi \star \psi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^2}.$$

En admettant l'inégalité de Peetre (voir question 5),

$$\forall s \geq 0, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad (1 + |\xi|^2)^s \leq 4^s\big((1 + |\eta|^2)^s + (1 + |\xi - \eta|^2)^s\big),$$

montrer que pour tout $s > 1/2$, il existe une constante $C_s > 0$ telle que :

$$\forall f, g \in H^s(\mathbb{R}), \quad fg \in H^s(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|fg\|_{H^s} \leq C_s\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

Pour ce qui suit, on se donne $s \geq 0$ et $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R})$.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t)\underline{u} := \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{it\xi^3}\widehat{\underline{u}}(\xi)\right)$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t)\underline{u} \in H^s(\mathbb{R})$ et $\|V(t)\underline{u}\|_{H^s} = \|\underline{u}\|_{H^s}$.

b) Montrer que $t \mapsto V(t)\underline{u}$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $H^s(\mathbb{R})$.

c) Montrer que, si $s \geq 3$, $t \mapsto V(t)\underline{u}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $H^{s-3}(\mathbb{R})$, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V(\cdot)\underline{u}\right)(t) = -\partial_x^3(V(t)\underline{u})$.

3) On suppose que $s \geq 3$. Montrer que si, pour un $T > 0$, $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}))$ est une solution forte de (**??**) (chaque terme de l'équation étant bien défini, à chaque instant $t \in [0,T]$, comme une fonction, modulo un ensemble de mesure nulle), avec $u(0) = \underline{u}$, alors elle vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad u(t) = V(t)\underline{u} - \int_0^t V(t - t')(u(t')^3)\,\mathrm{d}t' \tag{2}$$

(on pourra montrer que la dérivée en temps de $v : t \mapsto V(-t)u(t)$ vaut $-V(-t)(u(t)^3)$).

4) Lorsque $s > 1/2$ et $T > 0$, on dit que $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ est solution *intégrale* de (**??**) avec donnée initiale $\underline{u}$ si elle vérifie (**??**). Montrer l'unicité d'une telle solution (si u_1 et u_2 sont deux telles solutions, on pourra noter qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T]$, $\|u_1(t)\|_{H^s} + \|u_2(t)\|_{H^s} \leq R$, et que $v := u_2 - u_1$ vérifie $\|v(t)\|_{H^s} \leq \widetilde{C_s}R^2 \displaystyle\int_0^t \|v(t')\|_{H^s}\,\mathrm{d}t'$, avec une constante $\widetilde{C_s}$ liée à celle, C_s, donnée en 1) c)).

5) Soit $s > 1/2$. Montrer (par exemple, par une méthode de point fixe) qu'il existe $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$, solution intégrale de (**??**) avec donnée initiale $\underline{u}$.

6) On suppose que $s \geq 3$, et que $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}))$ est une solution forte de (**??**).

a) De quelle équation la conjuguée $\bar{u}$ est-elle solution (forte) ? Montrer que si $\underline{u}$ est à valeurs réelles, alors u aussi.

b) On suppose que $\underline{u}$ est à valeurs réelles. Montrer que $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ est une fonction décroissante.

7) Démontrer l'inégalité de Peetre donnée à la question 1 (on pourra commencer par noter que pour tous $a, b, s \geq 0$, $(a + b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$, par exemple grâce au fait que $a + b \leq 2\max(a, b)$).