Master M1 Mathématiques
UE Processus stochastiques
Année 2016-2017

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Interrogation du 17 février 2017

Durée : 40 minutes. Sans documents ni calculatrices. Les questions sont indépendantes. On justifiera toutes les réponses.

Toutes les variables aléatoires sont supposées être définies sur un même espace de probabilité.

(1) Soient X et Y deux variables aléatoires et Q la loi conditionnelle de X sachant Y. Rappeler soigneusement la définition de Q.
On suppose que, pour tout y, $Q(y, dx) = \nu(dx)$, pour une certaine mesure ν. Montrer qu'alors, X et Y sont indépendantes et donner la loi de X.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$. Calculer $E(X^2 \mid Y)$.

(3) Soit (X, Y) un couple gaussien centré de covariance $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la loi conditionnelle de X conditionnellement à Y.

Master M1 Mathématiques
UE Processus stochastiques
Année 2016-2017

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Interrogation du 3 mars 2017

Durée : 40 minutes. Sans documents ni calculatrices. On justifiera toutes les réponses.

(1) Soient f et g deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose que $g \leqslant cf$ uniformément, pour une constante c donnée.

Soit (X, U) un couple de variables aléatoires indépendantes, de loi de densité f et uniforme sur $[0, 1]$ respectivement. On note $Y = cUf(X)$.

a) Montrer que (X, Y) est uniformément distribué sur un domaine D que l'on précisera.

b) En déduire que X conditionné par l'évènement $A = \{Y \leqslant g(X)\}$ est de densité g.

c) Calculer $P(A)$.

Soit $(X_n, U_n)_n$ une suite i.i.d. de vecteurs aléatoires distribués comme (X, U). On considère

$$N = \inf\{n \geqslant 1 \mid cU_n f(X_n) \leqslant g(X_n)\}$$

d) Montrer que N est un temps d'arrêt pour une filtration associée aux variables aléatoires X_n et U_n, que l'on précisera.

e) Calculer la loi de N.

f) Montrer que X_N est une variable aléatoire puis calculer sa loi.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi standard gaussienne. On considère $R > 0$ et Θ dans $[0, 2\pi)$ tels que $(X, Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$.

g) Montrer que R et Θ sont des variables aléatoires.

h) Calculer la loi du couple (R, Θ).

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
D. Piau, L. Coquille

Année 2017
M1 - MAT414

Processus stochastiques – Contrôle continu

27 mars 2017

1 Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Question 1.1. Soient $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $G_X(s) = \mathbb{E}(s^{X_1})$ leur fonction génératrice commune, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite $(X_i)_{i \geq 1}$ et dont la fonction génératrice est G_N. Montrer que la fonction génératrice de $S = X_1 + \cdots + X_N$ est donnée par

$$G_S = G_N \circ G_X .$$

Question 1.2. Une poule pond N œufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf éclôt avec probabilité p indépendamment des autres. Soit K le nombre de poussins. Quelle est la distribution de K ?

2 Martingales et processus markoviens

Rappel : On dit qu'un processus $(X_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est markovien si pour tous $x_i \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

1. Donner un exemple de processus markovien qui n'est pas une martingale.
2. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $\{-1, 1\}$, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. Soit τ le temps du deuxième retour en zéro de S_n. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ la filtration donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. On note $R_n = S_{\min\{\tau, n\}}$.
   (a) Montrer que τ est un temps d'arrêt.
   (b) Montrer que R_n est une martingale.
   (c) Montrer que R_n n'est pas un processus markovien.

3 Temps d'apparition d'une séquence

Question 3.1. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli, c'est-à-dire telles que $\mathbb{P}(U_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_i = 0)$. Soit $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : U_n = 1\}$ et $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : U_n = 0\}$.

1. Quelle est la loi de τ_1 ?
2. Quelle est la loi de τ_0 ?
3. Quelle est la loi de la première apparition de la séquence 10 ?

4 Polynômes en la marche aléatoire qui sont des martingales

Question 4.1.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $\{-1,1\}$, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la marche aléatoire simple symmétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ la filtration canonique donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Soit $\theta > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{\theta X_i}/\cosh\theta\right) = 1$ pour tout $i \geq 1$.
2. Montrer que $M_n^\theta := e^{\theta S_n}/(\cosh\theta)^n$ est une martingale.
3. Soit le développement de M_n^θ en puissances de θ :

$$M_n^\theta = \sum_{k\geq 0} \theta^k P_k(S_n, n).$$

   Montrer que pour tout $k \geq 0$, le polynôme $P_k(S_n, n)$ est une martingale.
4. Calculer P_k pour $k = 0, 1, \dots, 5$.

UFR IM²AG
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

M1 Mathématiques générales
UE Processus stochastiques
Année 2016-2017

Examen du jeudi 18 mai 2017

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les réponses et les calculs doivent être justifiés. Les exercices sont indépendants les uns des autres. On demande de numéroter soigneusement les réponses aux questions.

Questions de cours – (1) Donner un exemple simple de martingale $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $M_n \to M_\infty$ presque sûrement et $E(M_0) \neq E(M_\infty)$.

(2) Énoncer le théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt bornés.

Exercice A – Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

(3) Montrer qu'on peut écrire de manière unique $X_n^2 = M_n + A_n$ de sorte que $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et $A = (A_n)_{n\geqslant 0}$ est prévisible (A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable), croissant ($A_n \leqslant A_{n+1}$), et tel que $A_0 = E(X_0^2)$.

On demande donc de démontrer l'existence d'un tel couple (M, A) de processus, et son unicité.

(4) On suppose dans cette question que $X_0 = 0$ et $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geqslant 1$, pour une suite $Y = (Y_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. de carré intégrable. Préciser à quelle condition sur Y le processus X est une martingale. Quand c'est le cas, identifier la décomposition (M, A) correspondant à X.

Exercice B – Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et Y des variables aléatoires intégrables, indépendantes, avec $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d., et, pour tout $n \geqslant 1$, $Y_n = X_n + Y$. On veut montrer que $E(Y \mid Y_1, \ldots, Y_n) \to Y$ quand $n \to \infty$, presque sûrement et dans L^1.

(5) Montrer que $M_n = E(Y \mid Y_1, \ldots, Y_n)$ définit une martingale $M = (M_n)_{n\geqslant 1}$ pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ que l'on précisera.

(6) En déduire que $M_n \to E(Y \mid \mathcal{F}_\infty)$ quand $n \to \infty$, pour une tribu $\mathcal{F}_\infty$ que l'on précisera.

(7) Montrer que Y est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. On pourra démontrer puis utiliser le fait que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to Y + E(X_1)$ quand $n \to \infty$, presque sûrement et dans L^1. Conclure.

T.S.V.P.

Exercice C – Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f(x, y) = 6x^2$ sur le triangle de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, 0)$.

(8) Calculer $E(X \mid Y)$.

(9) Calculer $E(X^2 \mid Y)$.

(10) Calculer la densité de la loi conditionnelle de X sachant Y.

Problème – Soit $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ la marche au hasard sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geqslant 1$, où la suite $X = (X_n)_{n \geqslant 1}$ est i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

(11) Montrer que S est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dont on précisera la distribution initiale ν et la matrice de transition q.

(12) Montrer que S admet une unique loi stationnaire π, que l'on calculera, et que S_n converge en loi vers π quand $n \to \infty$.

(13) Calculer $E(R)$, où $R = \inf\{n \geqslant 1 \mid S_n = 0\}$ désigne le premier temps de retour en 0.

On veut désormais préciser la vitesse de la convergence en loi de S_n vers π.

(14) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, la loi de S_n s'écrit

$$P_{S_n} = (1 - 2a_n - 2b_n)\delta_0 + a_n(\delta_{-1} + \delta_1) + b_n(\delta_{-2} + \delta_2)$$

pour certains nombres réels a_n et b_n. On ne demande pas de calculer a_n et b_n mais de les caractériser en précisant a_0 et b_0 et en donnant une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

(15) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec $u_n = a_n - \pi(1)$ et $v_n = b_n - \pi(2)$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = MU_n$ pour une matrice M que l'on calculera.

(16) Analyser M pour retrouver le fait que $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$, et, plus précisément, que $\frac{1}{n} \log |u_n| \to \kappa$ et $\frac{1}{n} \log |v_n| \to \kappa$ pour un nombre $\kappa < 0$ que l'on calculera.

Fin.

UFR IM²AG — UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

M1 Mathématiques générales
UE Processus stochastiques
Année 2016-2017

Seconde session : examen du 26 juin 2017

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les réponses et les calculs doivent être justifiés. Les exercices sont indépendants les uns des autres. On demande de numéroter soigneusement les réponses aux questions.

Questions de cours – (1) Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale convergeant presque sûrement vers une limite M_∞. Donner une condition portant sur $(M_n)_{n\geqslant 0}$, qui assure que $E(M_0) = E(M_\infty)$.

(2) Donner un exemple simple de martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge presque sûrement vers une limite M_∞ presque sûrement finie telle que $E(M_0) \neq E(M_\infty)$.

(3) Énoncer le théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt bornés.

Exercice A – Soient $n \geqslant 2$ un entier, et X et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(4) Montrer que la loi de $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ admet une densité f_n que l'on calculera.

(5) Montrer que les lois de Y_n et $X^{1/n}$ coïncident.

(6) Montrer que la loi de $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ admet une densité g_n que l'on calculera.

(7) Montrer que les lois de Z_n et $1 - X^{1/n}$ coïncident.

(8) Montrer que la loi de (Y_n, Z_n) admet une densité h_n que l'on calculera.

(9) Calculer la loi conditionnelle de Z_n sachant Y_n.

(10) On note $T_n = Z_n/Y_n$. Montrer que la loi de (Y_n, T_n) admet une densité k_n que l'on calculera.

(11) En déduire que T_n est indépendant de Y_n et que la loi de T_n admet une densité ℓ_n que l'on calculera.

(12) Déduire des calculs précédents que, pour tout entier $n \geqslant 2$, les lois de Z_n et $X_1 X_2^{1/2} \cdots X_n^{1/n}$ coïncident.

T.S.V.P.

Exercice B – Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geqslant 1$, où la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est i.i.d. de loi uniforme sur le sous-ensemble $\{-2, +2\}$ de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(13) Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(14) Préciser la distribution initiale ν et la matrice de transition q de $(S_n)_{n\geqslant 0}$.

(15) Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ admet une unique loi stationnaire π et calculer π.

(16) Montrer que S_n converge en loi vers π quand $n \to \infty$.

(17) Calculer $E(R)$, où $R = \inf\{n \geqslant 1 \mid S_n = 0\}$ désigne le premier temps de retour en 0.

On veut désormais préciser la vitesse de la convergence en loi de S_n vers π.

(18) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, la loi de S_n s'écrit

$$P_{S_n} = (1 - 2a_n - 2b_n)\delta_0 + a_n(\delta_{-1} + \delta_1) + b_n(\delta_{-2} + \delta_2)$$

pour certains nombres réels a_n et b_n entre 0 et $\frac{1}{2}$.

On ne demande pas de calculer a_n et b_n mais de les caractériser en donnant les valeurs de a_0 et b_0 et une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

(19) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec $u_n = a_n - \pi(1)$ et $v_n = b_n - \pi(2)$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = MU_n$ pour une matrice M que l'on calculera.

(20) Analyser la matrice M pour retrouver le fait que $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$, et, plus précisément, que $\frac{1}{n}\log|u_n| \to \kappa$ et $\frac{1}{n}\log|v_n| \to \kappa$ pour un nombre $\kappa < 0$ que l'on calculera.

Exercice C – Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et Y des variables aléatoires intégrables, indépendantes, avec $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n + Y$. On veut montrer que $E(Y \mid Y_1, \ldots, Y_n) \to Y$ quand $n \to \infty$, presque sûrement et dans L^1.

(21) Montrer que $M_n = E(Y \mid Y_1, \ldots, Y_n)$ définit une $\mathcal{G}$-martingale $(M_n)_{n\geqslant 1}$ pour une filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 1}$ que l'on précisera.

(22) En déduire que $M_n \to E(Y \mid \mathcal{G}_\infty)$ quand $n \to \infty$, pour un mode de convergence et une tribu $\mathcal{G}_\infty$ que l'on précisera.

(23) Montrer que Y est $\mathcal{G}_\infty$-mesurable. On pourra démontrer rigoureusement, puis utiliser, le fait que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to Y + E(X_1)$ quand $n \to \infty$, presque sûrement et dans L^1. Conclure.

Fin.