Exercice (environ 7 points)

1. (Question de cours) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ un lacet continu et C^1 par morceaux, et $\Gamma = \gamma([a, b])$. Rappeler la définition de l'indice d'un lacet par rapport à un point $z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma$ (noté $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$), son interprétation géométrique et les propriétés de la fonction Ind_γ.
2. Montrer que si pour tout $t \in [a, b]$, $|\gamma(t) - 1| < 1$, alors $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$.
3. On suppose que $0 \notin \Gamma$. Soit $\delta : [a, b] \to \mathbf{C}$ un lacet continu, C^1 par morceaux, ne passant pas par 0. Exprimer $\mathrm{Ind}_{\delta/\gamma}(0)$ à l'aide de $\mathrm{Ind}_\delta(0)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$. En déduire que si pour tout $t \in [a, b]$, $|\delta(t) - \gamma(t)| < |\gamma(t)|$ alors $\mathrm{Ind}_\delta(0) = \mathrm{Ind}_\gamma(0)$.
4. Soit $(\gamma_s)_{s \in [0,1]}$ une famille de chemins de $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$. On suppose que pour tout $s \in [0, 1]$ et $t \in [a, b]$, $\gamma_s(t) \neq 0$, et que l'application $H : (s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ est continue. Montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_s}(0)$ ne dépend pas de $s \in [0, 1]$. Indication : montrer que $\varepsilon := \inf\{|\gamma_s(t)| : (s, t) \in [0, 1] \times [a, b]\}$ est strictement positif, et utiliser la question précédente.

Problème (environ 13 points)

On se donne un ouvert connexe borné D et un ouvert Ω de $\mathbf{C}$ et tels que $\overline{D} \subset \Omega$.

1. Soient h une fonction C^1, holomorphe sur Ω, $u = \mathrm{Re} h$ et $m = \inf\{u(z) : z \in \overline{D}\}$. Montrer que la borne inférieure m est atteinte en un point de ∂D.
2. Soient f, g deux fonctions C^1, holomorphes sur Ω, telles que $|f - g| < |f|$ sur ∂D. Montrer que si f possède un zéro dans D, alors g aussi. Indication : on raisonnera par contraposition, supposant que g n'a pas de zéro dans D et en montrant que $\mathrm{Re}(f/g) > 1/2$ sur ∂D.
3. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que f possède un zéro dans D, mais n'en a pas sur ∂D, et on note $\rho = \inf\{|f(z)| : z \in \partial D\}$. Montrer que $f(D)$ contient $D(0, \rho)$. Indication : étant donné $\zeta \in D(0, \rho)$, on appliquera le résultat précédent à la fonction $g = f - \zeta$.
4. Dans cette question, on suppose que Ω contient $\overline{D}(0, 1)$, et on considère une fonction holomorphe f sur Ω, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On note $\lambda = |f'(0)|$ et $M = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, 1)\}$.
   (a) (Question de cours) Justifier l'existence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de coefficients telle que pour tout $z \in \overline{D}(0, 1)$,
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$
   et exprimer ces coefficients à l'aide des dérivées successives de f.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq M$.
   (c) Montrer que pour tout $r \in]0, 1[$ et $z \in C(0, r)$, $|f(z)| \geq \lambda r - Mr^2/(1 - r)$.
   (d) Montrer que $f(D(0, 1))$ contient $D(0, \lambda^2/(6M))$. Indication : appliquer le résultat des questions précédentes à $r = \lambda/(3M)$.
5. Soit $\overline{D}(a, r)$ un disque fermé inclus dans Ω et g une fonction holomorphe sur Ω. En se ramenant à la situation précédente, montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $g(D(a, r))$ contient un disque de centre $g(a)$ et de rayon qu'on exprimera en fonction de r, de $\tilde{\lambda} = |g'(a)|$ et de $\tilde{M} = \sup\{|g(z) - g(a)| : z \in \overline{D}(a, r)\}$.

Examen Fonctions holomorphes

3 janvier 2017

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer les théorèmes de Liouville et de d'Alembert. Déduire le théorème de d'Alembert du théorème de Liouville.
2. Enoncer le théorème de représentation conforme de Riemann.

Exercice 2 Soit

$$f(z) = \frac{\exp(1/z)}{1-z}.$$

Déterminer les singularités de f, leur nature et les résidus correspondants.

Exercice 3

1. Soit t un réel fixé. Déterminer les singularités de la fonction de la variable complexe z :

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2+1)^2}.$$

   Calculer les résidus de f aux points singuliers.

2. Lorsque $t > 0$, calculer par la méthode des résidus

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

3. Soit $G(z) = z^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+z^2)^2}\, dx$, $D = \{z \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
   (a) Expliquer pourquoi G est holomorphe sur D.
   (b) Montrer que $F(t) = G(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire la valeur de $G(z)$ pour $z \in D$.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas dans un ouvert connexe U contenant le disque unité fermé. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $|z| = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $f = \lambda g$ sur U. La conclusion est-elle encore vraie si l'on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas ?

T.S.V.P.

Exercice 5

Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $r \in (0,1)$. On suppose qu'il existe $z_0 \in D(0,r)$ tel que $f(z_0) = 0$. En écrivant la formule de Cauchy pour 0 et z_0 et en majorant $|f(0)| = |f(z_0) - f(0)|$, montrer que

$$|z_0| \geq \frac{r|f(0)|}{M(r) + |f(0)|},$$

où $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Exercice 6 Soit w un nombre complexe tel que $|w| < \frac{1}{e}$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = ze^{-z} - w$ a un zéro unique dans le disque unité. On désigne désormais par $h(w)$ cet unique zéro de f.

2. Montrer que si γ désigne le cercle unité orienté positivement, on a :

$$(1) \qquad h(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w}\, dz.$$

3. En déduire que

$$h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n.$$

4. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{\alpha h(w)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!} w^n.$$

   On utilisera une intégrale analogue à (1).

5. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ pour x réel positif ou nul. Montrer que la série de fonctions de la variable réelle x

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!} x^n e^{-nx}$$

   converge normalement pour $x \geq 0$. Montrer que $S(x) = e^{\alpha x}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et que $S(x) = e^{\alpha x'}$ pour $x \geq 1$, où x' est la solution appartenant à $[0,1]$ de l'équation : $x'e^{-x'} = xe^{-x}$.