DS 1

1. Soit $U =]0,1[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(u,v) = (x,y,z) = (u\cos(v), u\sin(v), v).$$
   a) Faire une esquisse donnant l'allure de $\Sigma = (U, f)$.
   b) Montrer que la paramétrisation $\Sigma = (U, f)$ est régulière.
   c) Calculer l'aire de la surface Σ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 2\pi$. (Indication : on pourra utiliser le fait que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.)
   d) Calculer, en fonction de $p = (u, v)$ la courbure de Gauss K, la courbure moyenne H et les courbures principales k_1 et k_2 de Σ.
   e) Soit V_p un vecteur unitaire de $T_p\Sigma$, avec $p = f(u, v)$. Montrer qu'il existe $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que
$$V_p = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$
   et donner les valeurs de θ pour lesquelles V_p engendre une direction principale de courbure.

2. Soit $\Sigma = (U, f)$ une surface régulière avec f de classe C^2. On dit qu'un point $p = f(u, v)$ est un *ombilic* si les courbures principales $k_1(p)$ et $k_2(p)$ satisfont $k_1 = k_2$, de sorte que la courbure de Gauss $K(p) = k_1^2$ et la courbure moyenne est $k_1(p)$. On suppose maintenant que tous les points de Σ sont des ombilics.
   a) Démontrer que l'application de Weingarten est diagonale dans toutes les bases du plan tangent.
   b) Démontrer qu'il existe une fonction λ de classe C^1 telle que $n_u = \lambda f_u$ et $n_v = \lambda f_v$, où n est le vecteur normal à Σ.
   c) Dériver les équations $n_u = \lambda f_u$ et $n_v = \lambda f_v$. En déduire que λ est constante.
   d) Montrer que $n = -kf + v$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante et $v \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant.
   e) Supposons $k \neq 0$. Montrer que Σ est contenue dans une sphère.
   f) Que se passe-t-il si $k = 0$?

3. Démontrer que l'application de Weingarten est indépendante de la paramétrisation choisie.

Université Joseph Fourier - M1 - 2016-2017

Examen session 1

16 mai 2017 - 3 heures

Les exercices ainsi que le problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Problème 1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2) \end{aligned}$$

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer qu'il existe U un voisinage de $(0,0)$, telle que (f,U) est une surface paramétrée lisse régulière et telle que $f_{|U}$ est injective. On pose $S = f(U)$.
3. Montrer que la matrice de la première forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v) est une homothétie qu'on déterminera.
4. Soit D un disque fermée centrée en $(0,0)$, de rayon δ, contenu dans U. Calculer l'aire de $f(D)$.
5. (Cours) Montrer que

   $$\forall (k,h) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle dN(u,v)(k), df(u,v)(h)\rangle + \langle N(u,v), d^2f(u,v)(h)(k)\rangle = 0$$

   où N est le vecteur normal unitaire associé à (f,U).
6. Montrer que la matrice de la seconde forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v) est une matrice constante qu'on déterminera. Indication : la question précédente permet de simplifier les calculs.
7. Calculer les courbures principales k_1 et k_2, ainsi que la courbure de Gauss K, en fonction des coordonnées (u,v).
8. Une *ligne de courbure* est une courbe C^1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S$ telle que pour tout $t \in I$, $\gamma'(t)$ est direction propre de la seconde forme fondamentale. Quelles sont les lignes de courbures ?

Problème 2. Soit S une surface lisse compacte de $\mathbb{R}^3$ (S est une sous-variété de dimension 2. En particulier, S est localement une surface paramétrée régulière). On veut démontrer qu'il existe au moins un point m de courbure de Gauss strictement positive.

1. Soit $0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Montrer qu'il existe un point $m \in S$, tel que $\delta : S \to \mathbb{R}$, $\delta(m) = \|\vec{Om}\|^2$ possède un maximum en m.

2. Montrer que $\vec{Om}^{\perp} = T_mS$.
3. Soit X un vecteur unitaire de T_mS, et $m+P$ le plan affine orthogonal à $m+T_mS$, passant par m et tel que $X \in P$. Montrer que $O \in m+P$.
4. Montrer qu'il existe un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$, ainsi qu'une courbe lisse $\gamma : I \to S$, paramétrée par arc, telle que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = X$. On pourra utiliser une paramétrisation locale de S.
5. Soit (f, U) une paramétrisation locale de S, telle que $f(0,0) = m$. En n'utilisant du cours que la définition de la seconde forme fondamentale II_m, montrer que
$$II_m(X,X) = \langle N(0,0), \gamma''(0) \rangle,$$
où $N(0,0)$ le vecteur unitaire normal à S en m associé à (f,U).
6. Effectuer le développement de Taylor à l'ordre 2 de γ en 0, et en déduire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $\delta(\gamma(s))$ en fonction de $\|Om\|$, $II_m(X,X)$ et s.
7. En déduire que l'application $X \in T_mS \mapsto II_m(X,X)$ est de signe constant. Conclure.

Problème 3. Dans ce problème, on pourra utiliser le fait suivant admis : il existe une application lisse $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1/4$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 1/2$. On notera parfois $(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $g, h : D((0,0), 3/4) \to \mathbb{R}$ deux applications lisses. Montrer qu'il existe ψ : $D(0,3/4) \to \mathbb{R}$, une application lisse telle que
$$\begin{aligned} \psi_{|D(0,1/4)} &= g_{|D(0,1/4)} \\ \psi_{|D(0,3/4)\setminus D(0,1/2)} &= h_{|D(0,3/4)\setminus D(0,1/2)} \\ \psi &\geq \min(0, \min_{D(0,3/4)} h) - \|g\|_\infty. \end{aligned}$$
2. Montrer (par exemple s'inspirant d'un exemple du cours) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $g_\epsilon : D(0,3/4) \to \mathbb{R}$, telle que le graphe de g_ϵ ait une courbure de Gauss strictement négative en $(0,0)$, et telle que $\|g_\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon$.
3. Montrer que l'intersection de la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$ avec $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in D((0,0),3/4), z > 0\}$ est un graphe au-dessus de $\overline{D((0,0),3/4)}$.
et lisse
4. En déduire qu'il existe une surface compacte lisse de $\mathbb{R}^3$, formée de la réunion disjointe $S^2 \cap \{(x,y,z), z < \sqrt{7}/4\}$ et d'un graphe au-dessus de $D(0,3/4)$ possédant au moins un point de courbure de Gauss strictement négative.