M1–Analyse Fonctionnelle
2016-2017

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Partiel

Durée : 1h30
Tous documents et moyens de communication sont interdits.

Dans tous les exercices, on pourra considèrer les espaces vectoriels comme étant des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Dans les deux premiers exercices, $\ell^1(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites réelles absolument sommables muni de sa norme usuelle $\|(u_n)\|_1 = \sum_n |u_n|$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites réelles bornées muni de sa norme usuelle $\|(u_n)\|_\infty = \max_n |u_n|$

Exercice 1 : Un mélange de normes (6 points)
On travaille dans $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$ et on pose

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \cap \ell^1(\mathbb{N}) \mid \|(u_n)\|_1 \leq 1\} .$$

Montrer que E est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
Indication : on pourra prendre une suite $(u_n^k) \subset E$ *convergeant vers* (u_n^∞) *dans* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *puis estimer les sommes partielles* $\sum_{n=0}^{N} |u_n^\infty|$ *et montrer qu'elles sont toutes majorées par* 1.

Exercice 2 : Somme d'adhérence et adhérence de la somme (8 points)
On travaille dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$ et on pose

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \mid u_{2k} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{et } F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \mid u_{2k} = \frac{1}{2^k} u_{2k+1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\} .$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces fermés de X.
2. Montrer que $\overline{E+F} = X$.
3. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_{2n+1} = 0$ et $v_{2n} = 1/2^n$ est dans X mais pas dans $E + F$.
4. En déduire que $\overline{E} + \overline{F} = \overline{E+F}$ est faux en général. A-t-on forcément une inclusion dans un sens ? (justifier)

T.S.V.P.

Exercice 3 : Sup ou Max ? (9 points)
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $f \in X'$ une forme linéaire continue. On rappelle que $\|f\|$ est définie par

$$\|f\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} |f(x)| \ . \tag{1}$$

1. Soit $x_0 \in X$ non nul. Rappeler pourquoi le théorème de Hahn-Banach implique qu'il existe une forme linéaire continue telle que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$.
2. En déduire que
$$\|x_0\| = \max_{f\in X',\ \|f\|=1} |f(x_0)|$$
(on justifiera bien en particulier qu'il s'agit d'un max et non d'un sup).
3. On considère l'espace de Banach $L^1(]-1,1[)$ muni de la norme $\|h\| = \int_{-1}^{1} |h(x)|\, dx$. Soit $\rho(x) = 1/(1+x^2)$ et soit f la forme linéaire
$$f(h) = \int_{-1}^{1} \rho(x)h(x)\, dx \ .$$
Montrer que f est continue et donner sa norme. Montrer que, dans ce cas, le sup de (1) n'est pas atteint.
4. On considère l'espace de Banach $L^2(]-1,1[)$ muni de sa norme hilbertienne usuelle $\|h\| = \left(\int_{-1}^{1} |h(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$. Justifier que pour toute forme linéaire f sur $L^2(]-1,1[)$, le sup de (1) est atteint.

M1–Analyse Fonctionnelle
2016-2017

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Contrôle continu n°2

Durée : 2h
Tous moyens de communication sont interdits.
Feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée.

Exercice 1 : Des fermés de la topologie faible (5 points)

Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. On rappelle que la topologie faible sur X est la topologie engendrée par les demi-espaces $\{x \in X, f(x) > \alpha\}$ où sont fixés $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in X'$ une forme linéaire continue.

1) Soit $K \subset X$ un convexe fermé pour la topologie forte. Montrer que K est fermé pour la topologie faible.
2) Si K est fermé pour la topologie forte mais pas convexe, est-il fermé pour la topologie faible ? Ou bien est-il forcément non-fermé ?

Exercice 2 : Duaux de $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (7 points)

On considère les espaces de Banach réels $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ munis de leur normes usuelles.

1) Soit $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que l'on peut associer à u une forme linéaire continue f sur $\ell^1(\mathbb{N})$ par

$$v = (v_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \longmapsto f(v) = \langle u|v\rangle_{\infty,1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n \ .$$

On assimilera f et u dans la suite.
2) Montrer que tout élément f du dual de $\ell^1(\mathbb{N})$ peut s'associer à un élément de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ comme ci-dessus (on pourra raisonner par analyse-synthèse en testant f sur les suites $(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$).
3) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue L sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $L(u) = \lim u_n$ pour toute suite $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ convergente (on pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach). Montrer que L ne peut s'écrire sous la forme $L(u) = \sum a_n u_n$ avec $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ (on pourra penser à tester une telle écriture sur les vecteurs $(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$). Qu'en déduire concernant $\ell^1(\mathbb{N})$ et le dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$?
4) Pouvez-vous donner le dual de $\ell^1(\mathbb{N})$ et de quoi $\ell^1(\mathbb{N})$ est le dual ? (on ne demande ici aucune démonstration).

T.S.V.P.

Exercice 3 : Continuité des opérateurs positifs (5 points)

Soit X un espace de Banach réel et X' son dual. On notera $\langle f, x\rangle_{X',X} = f(x)$ le crochet de dualité. On considère une application linéaire $T : X \longrightarrow X'$, pas forcément continue, telle que

$$\forall x \in X, \ , \ \ \langle Tx, x\rangle_{X',X} \geq 0 \ .$$

Notre but est de montrer que T est continue.

1) Soit $(x_n) \subset X$ une suite convergeant dans X vers un point x et telle que Tx_n converge vers une limite f dans X'. Montrer que, pour tout $y \in X$, on a

$$\langle f - Ty, x - y\rangle_{X',X} \geq 0 \ .$$

2) En appliquant cette inégalité à $y = x - \varepsilon h$ avec $h \in X$ et $\varepsilon > 0$, montrer que l'on a

$$\forall h \in X \ , \ \ \langle f - Tx, h\rangle_{X',X} \geq 0 \ .$$

3) Appliquer le théorème du graphe fermé pour en déduire que T est bien continue.

Exercice 4 : Le spectre de la primitive (6 points)

On considère $X = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application $T : X \longrightarrow X$ définie par

$$Tf \ : \ x \longmapsto \int_0^x f(y)\, \mathrm{d}y$$

c'est-à-dire que Tf est la primitive de f qui s'annule en 0. Cette dernière propriété pourra être utilisée sans justification durant tout l'exercice.

1) Montrer que T est bien définie de X dans X, linéaire et continue. Calculer la norme triple de T.

2) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'opérateur $T - \lambda id$ est inversible dans $\mathcal{L}(C)$.

Rappel : si $\mu \in \mathbb{C}$ et $h \in X$, l'équation $\phi'(x) = \mu\phi(x) + h$ a une unique solution de classe C^1 vérifiant $\phi(0) = 0$ et celle-ci est donnée par la formule de variation de la constante

$$\phi(x) = \int_0^x e^{\mu(x-y)} h(y)\, \mathrm{d}y \ .$$

3) Donner exactement le spectre de T et déterminer sa nature (ponctuel, continu ou résiduel).

Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle — Université Grenoble Alpes
2016-2017

Examen du 15 mai 2017

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 3 exercices indépendants.
Durée : 3 heures
Barême indicatif : exercice 1 : 8-10 points, exercice 2 : 3-4 points, exercice 3 : 8-10 points

Exercice 1 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$ et $C \subset X$ un sous-ensemble *convexe, compact et non vide* de X. On appelle *point extrémal de* C un vecteur $e \in C$ tel que

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \big(\exists\, t \in]0,1[\ ,\ tx + (1-t)y = e\big)\ \Rightarrow\ x = y = e\ .$$

On note $\mathcal{E}_C$ l'ensemble des points extrémaux de C. On rappelle que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(E) \subset X$ d'un sous-ensemble $E \subset X$ est le plus petit convexe contenant E. Le but de ce qui suit est de montrer que C est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : $C = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$.

1. Un sous-ensemble $E \subset C$ de C est dit *extrémal* si E est fermé, non vide et

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \big(\exists\, t \in]0,1[\ ,\ tx + (1-t)y \in E\big)\ \Rightarrow\ x \in E, y \in E\ .$$

   (a) Montrer que si E et E' sont des sous-ensembles extrémaux de C, alors il en est de même pour $E \cup E'$et $E \cap E'$. Montrer que $\{e\}$ est un sous-ensemble extrémal de C si et seulement si e est un point extrémal de C.

   (b) Soit E un sous-ensemble extrémal de C et $f \in X'$ une forme linéaire bornée sur X. Montrer que

$$K_E = \big\{x \in E\ ;\ f(x) = \max_{e \in E} f(e)\big\}$$

   est un sous-ensemble extrémal de C.

   (c) Soit $K \subset C$ un sous-ensemble extrémal de C, supposé convexe. Montrer que $\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_C$.

   (d) Montrer que les points extrémaux du carré $C = [-1,1]^2$ dans $X = \mathbb{R}^2$ sont les sommets du carré et qu'un segment contenu dans C est un sous-ensemble extrémal de C si et seulement si c'est une arrête du carré. Énumérer sans démonstration tous les sous-ensembles extrémaux de C.

2. On suppose que X est un espace préhilbertien.
   On rappelle que le convexe $C \subset X$ est supposé compact.

   (a) Montrer que l'ensemble

$$\widetilde{C} = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$$

   est convexe, compact et inclu dans C.

   (b) Montrer que la fonction $x \in C \mapsto \|x\|$ atteint son maximum en un point $e \in C$ et que $e \in \mathcal{E}_C$. En déduire que $\mathcal{E}_C$ est non vide.
   Plus généralement, montrer que si $K \subset C$ est convexe, compact et est un sous-ensemble extrémal de C, alors K contient au moins un point extrémal de C.
   Indication : pour montrer que $e \in \mathcal{E}_C$, vous pourrez utiliser le résultat suivant, que vous justifierez : dans un espace préhilbertien X, pour tout $u, v \in X$, $v \neq 0$, on a

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|\ \ \Leftrightarrow\ \ u = \lambda v\ \text{ avec }\ \lambda \geq 0\ .$$

   (c) On suppose que $C \setminus \widetilde{C} \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe une forme linéaire bornée $f \in X'$, $f \neq 0$ telle que l'ensemble

$$K_C = \big\{x \in C\ ;\ f(x) = \max_{y \in C} f(y)\big\}$$

   est disjoint de $\widetilde{C}$.

(d) Montrer que K_C est convexe et compact. Déduire des questions 1b) et 2b) que $K_C \cap \mathcal{E}_C \neq \emptyset$.

(e) En conclure que $C = \widetilde{C}$.

3. Dans toute la suite, on suppose que X est un espace vectoriel normé.

   (a) Soit E un sous-ensemble extrémal de C. Montrer que la famille $\mathcal{F}_E$ des sous-ensembles extrémaux de C inclus dans E, munie de la relation d'ordre

$$J \leq K \text{ si et seulement si } J \supset K \, , \tag{1}$$

   admet un élément maximal M_1 (notez le sens de l'inclusion dans (1)).

   (b) Montrer que M_1 contient un seul élément.
   Indication : Supposer que M_1 contient deux éléments distincts et utiliser un corollaire du théorème de Hahn-Banach et la question 1b) pour en déduire une contradiction avec la maximalité de M_1.

   (c) Déduire des questions 1a) et 3b) que tout sous-ensemble extrémal E de C contient au moins un élément extrémal $e \in \mathcal{E}_C$.

   (d) En reprenant et adaptant si nécessaire les arguments des questions 2a), 2c) et 2e), montrer que $C = \widetilde{C}$.

Exercice 2 Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire, $\{e_i\}_{i \in I}$ une famille orthonormée maximale de X et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X. On rappelle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $f \in X'$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

1. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si $\forall\, y \in X$, $\lim_{n \to \infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
   (i) $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$;
   (ii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et pour tout $i \in I$, $\lim_{n \to \infty} \langle e_i, x_n \rangle = \langle e_i, x \rangle$;
   (iii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et il existe $M \subset X$ dense dans X tel que $\forall\, y \in M$, $\lim_{n \to \infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base canonique de X ($(e_i)_n = 1$ si $i = n$ et 0 sinon). Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $\lim_{n \to \infty} \langle e_i, x_n \rangle = \langle e_i, x \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ mais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Exercice 3 On considère l'opérateur A défini sur l'espace de Hilbert $X = L^2(]0,1[)$ (muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$) par la formule

$$(Af)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \mathrm{d}t \quad , \quad x \in]0,1[\, . \tag{2}$$

On note $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $f \in X$ et tout $x \in]0,1[$, l'intégrale dans l'équation (2) est convergente. Montrer que si $f \in X$, alors $Af \in L^p(]0,1[)$ pour $1 \leq p < 2$.

   (b) On suppose que $f \in C([0,1])$ et on pose $F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\|Af\|_2^2 = -|F(1)|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{ \int_0^1 \overline{(Af)(x)} f(x) \mathrm{d}x \right\} .$$

   En déduire que

$$\|Af\|_2 \leq 2\|f\|_2 \, .$$

   (c) Montrer que A est un opérateur linéaire borné $X \to X$ de norme $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2$.

2. Déterminer l'adjoint A^* de A.
3. On veut déterminer le spectre ponctuel $\sigma_p(A)$ de A.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $z = \lambda^{-1} = \zeta + \mathrm{i}\eta$, où $\zeta = \mathrm{Re}\{z\}$ et $\eta = \mathrm{Im}\{z\}$.
Montrer que $F_\lambda(x) = x^z = \mathrm{e}^{(\zeta+\mathrm{i}\eta)\ln x}$ est solution de l'équation différentielle $\lambda x F'(x) = F(x)$.

(b) Montrer que $F'_\lambda \in L^2(]0,1[)$ si et seulement si $\zeta > 1/2$.

(c) En déduire que $\sigma_p(A)$ est le disque ouvert $B_{(1,0)}(1)$ de centre $(1,0)$ et de rayon 1 du plan complexe.

4. Montrer que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = 2$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Re}\{z\} < 1$, avec $z = \lambda^{-1}$. Montrer que si $g \in C([0,1])$ alors $(A-\lambda)f = g$ admet une solution $f \in X$. En déduire que $A - \lambda$ a une image dense dans X.
Indication : On pourra vérifier que les solutions de l'équation différentielle $-\lambda x F'(x) + F(x) = xg(x)$ sur $[0,1]$ sont données par
$$F(x) = -zx^z\left(\int_x^1 t^{-z} g(t)\mathrm{d}t + C\right),$$
puis montrer que l'on peut choisir la constante C de telle manière que $f = F'$ soit continu en 0.

6. Montrer que A n'a pas de spectre résiduel : $\sigma_r(A) = \emptyset$.
En déduire que
$$\sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*) = \{\overline{\lambda}\,;\, \lambda \in \sigma_p(A)\} = B_{(1,0)}(1)\,.$$

7. **(Questions Bonus)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

(a) Montrer que si $g \in C([0,1])$ alors $(A-\lambda)f = g$ admet une unique solution $f \in X$, qui est telle que
$$\|f\|_2 \le |\lambda|^{-2}(2 + |\lambda|)\|g\|_2\,.$$
Indication : On pourra argumenter comme à la question 5 que $(A-\lambda)f = g$ admet une solution f continue en 0 et montrer que $|f|$ est majoré par $|\lambda|^{-2}\big(A + |\lambda|\big)\big(|g|\big)$.

(b) En déduire que $\sigma(A)$ et $\sigma(A^*)$ sont contenus dans le demi-disque $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\lambda| \le 2, \mathrm{Re}\lambda \ge 0\}$.

Examen du 23 juin 2017 (2nde session)

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 3 exercices indépendants.
Durée : 3 heures
Barême indicatif : exercice 1 : 8 points, exercice 2 : 5 points, exercice 3 : 7 points

Exercice 1 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$ et $C \subset X$ un sous-ensemble convexe, compact et non vide de X. On appelle *point extrémal de* C un vecteur $e \in C$ tel que

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \left(\exists\, t \in]0,1[\,,\ tx + (1-t)y = e\right) \ \Rightarrow\ x = y = e\,.$$

On note $\mathcal{E}_C$ l'ensemble des points extrémaux de C. On rappelle que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(E) \subset X$ d'un sous-ensemble $E \subset X$ est le plus petit convexe contenant E. Le but de ce qui suit est de montrer que C est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : $C = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$.

1. Un sous-ensemble $E \subset C$ de C est dit *extrémal* si E est fermé, non vide et

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \left(\exists\, t \in]0,1[\,,\ tx + (1-t)y \in E\right) \ \Rightarrow\ x \in E, y \in E\,.$$

   (a) Montrer que si E et E' sont des sous-ensembles non disjoints extrémaux de C, alors il en est de même pour $E \cap E'$. Montrer que $\{e\}$ est un sous-ensemble extrémal de C si et seulement si e est un point extrémal de C.

   (b) Soit E un sous-ensemble extrémal de C et $f \in X'$ une forme linéaire bornée sur X. Montrer que

$$K_E = \left\{x \in E\ ;\ f(x) = \max_{e \in E} f(e)\right\}$$

   est un sous-ensemble extrémal de C.

2. On rappelle que X est un espace vectoriel normé et C est un sous-ensemble convexe compact de X.

   (a) Montrer que l'ensemble

$$\widetilde{C} = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$$

   est convexe et inclu dans C.

   (b) On suppose que $C \setminus \widetilde{C} \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe une forme linéaire bornée $f \in X'$, $f \neq 0$ telle que l'ensemble

$$K_C = \left\{x \in C\ ;\ f(x) = \max_{y \in C} f(y)\right\}$$

   est disjoint de $\widetilde{C}$.

   (c) Soit E un sous-ensemble extrémal de C. Montrer que la famille $\mathcal{F}_E$ des sous-ensembles extrémaux de C inclus dans E, munie de la relation d'ordre

$$J \leq K \ \text{ si et seulement si }\ J \supset K\ , \tag{1}$$

   admet un élément maximal M_1 (notez le sens de l'inclusion dans (1)).

   (d) Montrer que M_1 contient un seul élément.
   Indication : Supposer que M_1 contient deux éléments distincts et utiliser un corollaire du théorème de Hahn-Banach et la question 1b) pour en déduire une contradiction avec la maximalité de M_1.

   (e) Déduire des questions 1a) et 2d) que tout sous-ensemble extrémal E de C contient au moins un élément extrémal $e \in \mathcal{E}_C$.

   (f) Montrer que $C = \widetilde{C}$.

Exercice 2 Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés $X \to X$ et 1_X l'opérateur identité sur X. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $p_n : z \in \mathbb{C} \mapsto p_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ une fonction polynôme de degré n. On définit

$$p_n(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 1_X .$$

1. On note $p_n(\sigma(A)) = \{p_n(\lambda) \ ; \ \lambda \in \sigma(A)\}$ l'image du spectre de A par p_n. On veut montrer que le spectre de $p_n(A)$ est
$$\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A)) .$$
   (a) Soit $\mu \in \sigma(p_n(A))$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines complexes de $p_n(z) - \mu$. Montrer qu'au moins une des racines λ_i appartient à $\sigma(A)$, en déduire que $\mu \in p_n(\sigma(A))$.
   (b) Soient $B \in \mathcal{L}(X)$ et $C \in \mathcal{L}(X)$ deux opérateurs bornés. Montrer que si BC et CB sont des bijections $X \to X$, alors B et C sont également des bijections. Trouver un contre-exemple prouvant que cela n'est pas forcément vrai si l'on suppose uniquement que BC est une bijection $X \to X$ (on pourra considérer les opérateurs de décalage à gauche et à droite sur $\ell^2(\mathbb{N})$).
   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si $p_n(\lambda)$ est dans l'ensemble résolvant de $p_n(A)$ alors λ est dans l'ensemble résolvant de A. En conclure que $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$.
2. Montrer que si A est auto-adjoint, alors $p_n(A)^* p_n(A) = |p_n|^2(A)$ est auto-adjoint. En déduire que
$$\|p_n(A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p_n(\lambda)| .$$

Exercice 3 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ une bijection linéaire bornée $X \to X$. Montrer que le spectre de A^{-1} vaut
$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ ; \ \lambda \in \sigma(A) \right\} .$$
2. On considère un opérateur unitaire $U : X \to X$.
   (a) Montrer que les spectres de U et de U^{-1} sont inclus dans le disque fermé de rayon 1.
   (b) En déduire que $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| = 1\}$.
3. On munit $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ du produit scalaire usuel $\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{u}_n v_n \ \ \forall\, u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et de la norme $\|\cdot\|_2$ induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit S l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, défini par $(Su)_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$.
   (a) Montrer que S est un opérateur unitaire et déterminer son adjoint S^*.
   (b) Montrer que S n'a pas de spectre ponctuel ni de spectre résiduel.
   (c) Pour tous réels $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varepsilon > 0$, on considère le vecteur $v_{\theta,\varepsilon} \in X$ défini par $(v_{\theta,\varepsilon})_n = e^{in\theta} e^{-\varepsilon |n|}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\|(S - e^{i\theta} 1_X) v_{\theta,\varepsilon}\|_2 \to 0$ et $\|v_{\theta,\varepsilon}\|_2 \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$ et en déduire que $S - e^{i\theta} 1_X$ n'est pas une bijection $X \to X$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (d) Conclure de ce qui précède que $\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| = 1\}$.