TER
Courbure des graphes et inégalités géométriques

Maé Miachon Lemeulle

2021

encadré par Hervé Pajot

Table des matières

1 Introduction

La notion de courbure est un outil très important de la géométrie des courbes, des surfaces et de ce que l'on apelle plus généralement des variétés, des objets la plupart du temps définis commme continus, infinitésimaux ; en tout cas non discrets. Au cours des dernières décennies des mathématicien.ne.s se sont intéressé.e.s à une transposition de cet outil au cas discret des graphes (et des groupes à travers des graphes associés, les graphes de Cayley), et ont montré que cette transposition était fertile en résultats, dans plusieurs directions. On peut mentionner un des pionniers de la géométrie des groupes, Michael Gromov, qui a notamment établit dans un théorème important [5] l'équivalence entre une propriété purement algébrique sur les groupes, la nilpotence, et une propriété de croissance du volume, qui dépend de la métrique et de la mesure.

Courbure de Gauss, courbure sectionnelle, courbure de Ricci,... Si les variétés jouissent de plusieurs notions de courbure déjà bien établies et étudiées, la recherche est toujours active pour définir une notion de courbure convenable pour les graphes (on donnera une idée de ce que "convenable" veut dire). Dans le cadre des variétés, les cadres d'étude se définissent souvent par le signe de la courbure (variétés à courbure de Ricci positive, espaces à courbure sectionnelle négative). Pour les graphes, les notions de courbures sont inspirées de la courbure de Ricci pour les variétés riemanniennes, dans le cas de la courbure positive. On sait en effet que la condition de courbure de Ricci positive entraîne des résultats intéressants, par exemple le fait qu'une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive vérifie l'inégalité de Poincaré. Par analogie, les définitions de courbure (de Ricci) que l'on exposera permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux des variétés à courbure de Ricci positive.
Il existe également une théorie importante des groupes associés à une courbure négative, les groupes hyperboliques, qu'on n'abordera pas ici.

Dans la première partie, on démontrera une inégalité isopérimétrique sur un graphe infini, puis on verra une première définition de "courbure positive", qui, en miroir de celle de Ricci pour les variétés, implique une inégalité de Poincaré ainsi qu'une propriété qui découle de la propriété de doublement du volume, qui servent à démontrer l'inégalité isopérimétrique.

Ensuite, on exposera une définition d'un critère de courbure-dimension inspiré de celui de Dominique Bakry et Michel Émery [1] définie sur des espaces métriques, pour encore une fois donner une condition de borne à la courbure.

Enfin, on verra une définition de courbure de Ricci sur les graphes de Cayley, par Moon Duchin et alii [2], qui donne des informations pertinentes sur les groupes. En effet, pour cette notion de courbure, les groupes abéliens sont plats, tandis qu'on montre qu'un graphe de Cayley plat est associé à un groupe abélien à un quotient (gentil) près.

Plusieurs notions de courbures évoquées s'inspirent de la courbure de Ricci que Yann Ollivier a défini de manière générale pour des espaces métriques. On évoquera cette courbure adaptée au cas des graphes dans une dernière partie.

2 Définitions générales

On donne ici une définition d'un graphe et on donne tout le vocabulaire utile pour la suite.

Un **graphe (non orienté)** $G = (S, A)$ est un ensemble S dont les éléments sont appelés **sommets** muni d'un ensemble A de paires de sommets, qui sont appelées **arêtes**.
On dit que deux sommets $x, y \in S$ sont **voisins** si $\{x, y\} \in A$, et on note alors $x \sim y$.
Un **chemin** est une suite finie (ou vide) d'arêtes $(a_1, ..., a_n) \in A^n, n \in \mathbb{N}$. On dit qu'il **relie** $x \in S$ à $y \in S$ si $x \in a_1$, $y \in a_n$ et si deux arêtes consécutives ont un sommet commun. Un chemin reliant deux sommets est dit **minimisant** s'il n'existe pas de chemin reliant les mêmes sommets comportant moins d'arêtes. Un chemin minimisant est aussi appelé une **géodésique**.
Un graphe est dit **connexe**, si pour toute paire de sommets $x, y \in S$ il existe un chemin les reliant.
Si le graphe est connexe, on peut définir une **distance** d sur l'ensemble des sommets du graphe : si x et y sont deux sommets, on définit $d(x, y) \in \mathbb{N}$ le nombre d'arêtes d'un chemin minimisant reliant x à y.

Pour toute partie de sommets $\Omega \subset S$ on note $|\Omega|$ son cardinal, on définit son **bord** comme les sommets voisinant des sommets hors Ω :

$$\partial\Omega \coloneqq \{x \in \Omega \mid \exists y \in S \backslash \Omega, x \sim y\} \subset \Omega$$

et on appelle $|\partial\Omega|$ son **périmètre**.

Si $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}$: $B(x, n) \coloneqq \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant n\}$ est la **boule** de centre x et de rayon n. On définit son **volume** $V(x, n) \coloneqq |B(x, n)|$

Remarque. La boule de centre $x \in S$ et de rayon 1 est l'ensemble composé de x et de ses voisins.

Un graphe est dit **localement fini** si tout sommet a un nombre fini de voisins.
On appelle **degré d'un sommet** $x \in S$ son nombre de voisins $d_x \coloneqq V(x, 1) - 1$
On appelle **degré du graphe** G le nombre maximal de voisins qu'un sommet peut avoir : $d(G) \coloneqq \sup_{x \in S} d_x$
Un graphe de **degré fini** est donc un graphe dont le nombre de voisins est uniformément borné sur l'ensemble des sommets.

Dans toute la suite, on considère des graphes non orientés, connexes et localement finis.

3 Une inégalité isopérimétrique et une première notion de courbure

Le principal résultat de cette partie est tiré d'un article de Thierry Coulhon et Laurent Saloff-Coste [3]. C'est une inégalité isopérimétrique que les auteurs montrent à la fois pour des variétés et pour des graphes, en utilisant une inégalité de Poincaré et une propriété de croissance (contrôlée) des boules (en fait un corollaire), qui découlent dans le cas des vériétés de la courbure positive. Dans le cas des graphes, les auteurs définissent également une condition de courbure positive qui entraîne ces deux propriétés et donc l'inégalité isopérimétrique.

3.1 Quelques définitions

On considère un graphe non orienté $G = (S, A)$ connexe et de degré fini $N \in \mathbb{N}$. On a en particulier que toute boule est finie, ce qui nous permet de faire des sommes sur leurs éléments.

Définition 1. Une **fonction à support fini** sur G est une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ telle que son support $\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$ est fini. On note $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble de ces fonctions

Définition 2. Le **gradient** ou la **longueur du gradient** d'une fonction à support fini $f \in \mathcal{F}(G)$ est définie pour tout sommet $x \in S$ par

$$\nabla f(x) \coloneqq \sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} |f(x) - f(y)| = \sum_{y \in B(x,1)} |f(x) - f(y)|$$

Remarque. Une fonction $f \in \mathcal{F}(G)$ étant mesurable sur S pour la mesure de comptage, et à support fini donc intégrable, on peut considérer sa norme 1 :
$||f||_1 = \sum_{x \in S} |f(x)|$

Définition 3. On définit la **moyenne** de $f \in \mathcal{F}(G)$ sur une boule $B(x, n)$ par :

$$f_n(x) \coloneqq \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,n)} f(y)$$

Définition 4. On dit que G vérifie l'**inégalité de Poincaré** à l'échelle sur les boules si il existe une constante $C_G > 0$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{F}(G) : \forall x \in S : \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \leqslant C_G n \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)| \quad \text{(P)}$$

C'est l'analogue de l'inégalité de Poincaré sur les espaces de Sobolev, qui joue un rôle important en analyse géométrique.

Définition 5. On dit que G vérifie la **propriété de doublement du volume** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in S : \forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{V(x,2n)}{V(x,n)} \leqslant M \quad \text{(DV)}$$

Cette propriété intervient en analyse, notamment dans les espaces homogènes de Coifman-Weiss.

Définition 6. On définit $V(n) \coloneqq \inf_{x \in S} V(x, n)$ le volume minimal d'une boule et la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ \lambda & \longmapsto \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid V(n) \geqslant \lambda\} \end{array} \right.$$

Remarque. Cette fonction est bien définie sur $[0, |S|]$ donc sur $\mathbb{R}_+$ si le graphe est infini. Dans la suite de la partie, on supposera le graphe infini, le cas fini n'étant pas intéressant ici.

3.2 L'inégalité isopérimétrique

Une inégalité isopérimétrique est en géométrie une inégalité portant sur le volume d'un domaine et le volume de son bord. Celle la plus connue est celle liant l'aire $\mathcal{A}$ d'un disque et son périmètre p :

$$\mathcal{A} \quad \leqslant \quad \frac{1}{4\pi}p^2$$

Ici, l'inégalité relie directement le cardinal d'un ensemble de sommets avec le cardinal de son bord :

Théorème 1. *Soit G un graphe non orienté infini dénombrable et connexe tel que tout sommet ait au plus $N \in \mathbb{N}^*$ voisins*

Si G vérifie l'inégalité de Poincaré (P) et la propriété de doublement du volume (DV), alors G vérifie l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$\exists C > 0, \quad \forall\ \Omega \subset S \text{ fini} : \quad \frac{|\Omega|}{\phi(C|\Omega|)} \quad \leqslant \quad C|\partial\Omega| \tag{1}$$

On commence par montrer une petite propriété utile liant le périmètre au gradient

Proposition 3.1. *Pour tout ensemble fini de sommets $\Omega \subset S$:*

$$|\partial\Omega| \quad \leqslant \quad \frac{||\nabla \mathbb{1}_\Omega||}{2} \quad \leqslant \quad N|\partial\Omega| \tag{2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
||\nabla \mathbb{1}_\Omega|| \quad &= \quad \sum_{x\in S}\sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} |\mathbb{1}_\Omega(x) - \mathbb{1}_\Omega(y)| \\
&= \quad \sum_{x\in \Omega}\sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} |\mathbb{1}_\Omega(x) - \mathbb{1}_\Omega(y)| \quad + \sum_{x\in S\setminus\Omega}\ \sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} |\mathbb{1}_\Omega(x) - \mathbb{1}_\Omega(y)| \\
&= \quad \sum_{x\in\Omega}\ \sum_{\substack{y\in S\setminus\Omega\\ y\sim x}} 1 \ + \sum_{x\in S\setminus\Omega}\ \sum_{\substack{y\in \Omega\\ y\sim x}} 1 \\
&= \quad 2\sum_{x\in\Omega}\ \sum_{\substack{y\in S\setminus\Omega\\ y\sim x}} 1 \\
&= \quad 2\sum_{x\in\Omega} |B(z,1)\setminus\Omega| = 2\sum_{x\in\partial\Omega} |B(z,1)\setminus\Omega| \\
&\geqslant \quad 2|\partial\Omega|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\nabla \mathbb{1}_\Omega|| \quad &= \quad 2\sum_{x\in\partial\Omega} |B(x,1)\setminus\Omega| \\
&\leqslant \quad 2|\partial\Omega| \left[\max_{x\in\partial\Omega} V(x,1) - 1\right] \\
&\leqslant \quad 2N|\partial\Omega|
\end{aligned}$$

□

Nous montrons maintenant un résultat intermédiaire : les propriété de Poincaré et de doublement du volume impliquent une propriété sur les fonctions à support fini sur le graphe, qui nous permettra de démontrer le théorème :

Proposition 3.2. *Si G vérifie* (P) *et* (DV), *alors G vérifie la propriété suivante :*

$$\exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{F}(G) :\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad ||f - f_n||_1 \quad \leqslant \quad Cn||\nabla f||_1 \qquad (\star)$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{F}(G)$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Considérons une famille $(x_i)_{i\in I}$ de sommets de G telle que :

$$\begin{cases} S = \bigcup_{i\in I} B(x_i, n) \text{ les boules recouvrent le graphe} \\ \forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow d(x_i, x_j) \geqslant n \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que le nombre de boules $B(x_i, 2n)_{i\in I}$ dans lesquelles se trouve un sommet quelconque du graphe est fini et même borné :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S : I_n(x) := \{i \in I \mid x \in B(x_i, 2n)\} \leqslant K^4$$

où K est une constante majorant le doublement du volume. En effet :

$$\begin{aligned} &\overbrace{V(x, 4n) \geqslant \sum_{i\in I_n(x)} V(x_i, \frac{n}{2})}^{\bigsqcup_{i\in I_n(x)} B(x_i, \frac{n}{2}) \subset B(x, 4n)} \geqslant \frac{1}{K^4} \sum_{i\in I_n(x)} V(x_i, 8n) \\ &\qquad\qquad \underbrace{\geqslant \frac{1}{K^4} |I_n(x)| V(x, 4n)}_{\forall i\in I_n(x): B(x,4n)\subset B(x_i,8n)} \end{aligned}$$

$$\text{donc} \qquad |I_n(x)| \leqslant K^4 \quad \forall x \in S \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Après une inégalité triangulaire, on découpe la distance $||f - f_n||_1$ en trois parties, que l'on majore à chacune par une constante fois $n||\nabla f||_1$:

$$\begin{aligned} ||f - f_n||_1 \quad &\leqslant \quad \sum_{i\in I} \sum_{x\in B(x_i,n)} |f(x) - f_n(x)| \\ &\leqslant \quad \sum_{i\in I} \sum_{x\in B(x_i,n)} \underbrace{|f(x) - f_n(x_i)|}_{(a)} + \underbrace{|f_n(x_i) - f_{2n}(x)|}_{(b)} + \underbrace{|f_{2n}(x_i) - f_n(x)|}_{(c)} \end{aligned}$$

(a) et (b) se traitent avec l'inégalité de Poincaré et la bornitude des $|I_n(x)|$:

$$\begin{aligned} (a) \sum_{i\in I} \sum_{x\in B(x_i,n)} |f(x) - f_n(x_i)| &\overset{(P)}{\leqslant} C_G n \sum_{i\in I} \sum_{x\in B(x_i,2n)} |\nabla f(x)| \\ &\leqslant C_G n \sum_{x\in S} |\nabla f(x)|\ |I_{2n}(x)| \\ &\leqslant K^4 C_G ||\nabla f||_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rrcl}
(b) & \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} |f_n(x_i)-f_{2n}(x_i)| & = & V(x_i,n)|f_n(x_i)-f_{2n}(x_i)| \\
& & = & \left|\displaystyle\sum_{y\in B(x_i,n)} f(y)-f_{2n}(x_i)\right| \\
& & \leqslant & \displaystyle\sum_{y\in B(x_i,n)} |f(y)-f_{2n}(x_i)| \\
& & \leqslant & \displaystyle\sum_{y\in B(x_i,2n)} |f(y)-f_{2n}(x_i)| \\
& & \leqslant & 2C_G n \displaystyle\sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| \\
\text{donc} & \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{x\in B(x_i,n)} |f_n(x_i)-f_{2n}(x_i)| & \leqslant & 2C_G n \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| \\
& & \leqslant & 2C_G n \displaystyle\sum_{y\in S} |\nabla f(y)|\; |I_{4n}(x)| \\
& & \leqslant & 2K^4 C_G n ||\nabla f||_1
\end{array}
$$

Pour (c), on utilise l'inégalité de Poincaré, le doublement du volume et des inclusions de boules :

$$
\begin{array}{rrcll}
(c) & \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} |f_{2n}(x_i)-f_n(x)| & \leqslant & \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y\in B(x,n)} |f(y)-f_{2n}(x_i)| & \\
& & \leqslant & \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y\in B(x_i,2n)} |f(y)-f_{2n}(x_i)| & \text{car } B(x,n)\subset B(x_i,2n) \\
& & \leqslant & \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} \frac{1}{V(x,n)} 4C_G n \sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| & \text{grâce à (P)} \\
& & \leqslant & 4C_G n \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} \frac{K^2}{V(x,4n)} \sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| & \text{grâce à (DV)} \\
& & \leqslant & 4C_G n \displaystyle\sum_{x\in B(x_i,n)} \frac{K^2}{V(x_i,n)} \sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| & \text{car } B(x_i,n)\subset B(x,4n) \\
& & \leqslant & 4C_G n K^2 \displaystyle\sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| & \\
\text{donc} & \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{x\in B(x_i,n)} |f_{2n}(x_i)-f_n(x)| & \leqslant & 4K^2 C n \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{y\in B(x_i,4n)} |\nabla f(y)| & \\
& & \leqslant & 4K^2 C_G n \displaystyle\sum_{y\in S} |\nabla f(y)|\; |I_{4n}(x)| & \\
& & \leqslant & 4K^6 C_G n ||\nabla f||_1 &
\end{array}
$$

Finalement, on a :

$$||f-f_n||_1 \leqslant C_G K^4 n(1+2+4K^2)||\nabla f||_1$$

soit l'inégalité voulue $(\star)$:

$$||f-f_n||_1 \leqslant Cn||\nabla f||_1$$

$\square$

On passe de la propriété ($\star$) au théorème grâce au :

Lemme 3.3. *Si $f \in \mathcal{F}(G)$ vérifie pour un certain $C > 0$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad ||f - f_n||_1 \quad \leqslant \quad Cn||\nabla f||_1 \tag{$\star$}$$

Alors pour tout $\lambda > 0$:

$$|\{|f| > \lambda\}| \quad \leqslant \quad \frac{2C}{\lambda}\ \phi(\frac{2}{\lambda}||f||_1)\ ||\nabla f||_1 \tag{3}$$

Démonstration. On sépare la préimage en deux parties :

$$\begin{aligned} \{|f| > \lambda\} \quad &\subset \quad \{|f - f_n| > \frac{\lambda}{2}\} \ \cup \ \{|f_n| > \frac{\lambda}{2}\} \\ |\{|f| > \lambda\}| \quad &\leqslant \quad |\{|f - f_n| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{|f_n| > \frac{\lambda}{2}\}| \end{aligned}$$

or la moyenne est contrôlée par la norme 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad ||f_n||_\infty \quad \leqslant \quad \frac{1}{V(n)}||f||_1$$

et tend même vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$ car f est à support fini sur un graphe infini, donc on peut se mettre à un rang tel que le terme de droite soit nul :
en prenant

$$N_{f\lambda} := \phi(\frac{2}{\lambda}||f||_1) \text{ tel que : } V(N_{f\lambda}) \geqslant \frac{2}{\lambda}||f||_1$$

on a :

$$||f_{N_{f\lambda}}||_\infty \quad \leqslant \quad \frac{1}{V(N_{f\lambda})}||f_{N_{f\lambda}}||_1 \quad \leqslant \quad \frac{\lambda}{2} \qquad \text{donc : } |\{|f_{N_{f\lambda}}| > \frac{\lambda}{2}\}| = 0$$

on a alors :

$$|\{|f| > \lambda\}| \quad \leqslant \quad |\{|f - f_{N_{f\lambda}}| > \frac{\lambda}{2}\}| =: M$$

or ce dernier terme vérifie :

$$M \quad \leqslant \quad \frac{2}{\lambda} \sum_{\{|f - f_{N_{f\lambda}}| > \frac{\lambda}{2}\}} |f(x) - f_{N_{f\lambda}}(x)| \quad \leqslant \quad \frac{2}{\lambda}||f - f_{N_{f\lambda}}||_1$$

donc :

$$|\{|f| > \lambda\}| \quad \leqslant \quad M \quad \leqslant \quad \frac{2}{\lambda}||f - f_{N_{f\lambda}}||_1$$

en utilisant ($\star$) on a encore :

$$\begin{aligned} |\{|f| > \lambda\}| \quad &\leqslant \quad \frac{2}{\lambda}CN_{f\lambda}||\nabla f||_1 \\ &= \quad \frac{2C}{\lambda}\phi(\frac{2}{\lambda}||f||_1)||\nabla f||_1 \end{aligned}$$

□

Cette dernière égalité permet de conclure la preuve du théorème :
En prenant $f = \mathbb{1}_\Omega$, $\lambda = 1$ et $C' = \max(4NC, 2)$, on a :

$$\begin{aligned} |\{|\mathbb{1}_\Omega| > 1\}| \quad = \quad |\Omega| \quad &\leqslant \quad 2C\ \phi(2|\Omega|)\ ||\nabla \mathbb{1}_\Omega||_1 \\ &\leqslant \quad 4NC\ \phi(2|\Omega|)\ |\partial\Omega| \\ \text{donc} \quad \frac{|\Omega|}{\phi(C'|\Omega|)} \quad &\leqslant \quad C'|\partial\Omega| \end{aligned}$$

□

3.3 Une condition de courbure positive

Des hypothèses alternatives permettent d'obtenir (P) ainsi que ($\star$), et donc d'avoir l'inégalité isopérimétrique avec une condition qu'on appelle de courbure positive.
Cette condition est définie en fonction d'un choix de chemins minimisants entre les sommets d'une boule..

Définition 7. Soient $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}$, et choisissons pour tous $y, z \in B(x,n)$ une géodésique reliant y à z. On note alors l'ensemble de ces géodésiques :

$$\Gamma_{x,n} \quad \coloneqq \quad \{\gamma_{y,z} \mid y, z \in B(x,n)\},$$

et

$$K(x,n) \quad \coloneqq \quad \frac{1}{V(x,n)} \max_{a \subset B(x,2n)} |\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \mid a \in \gamma\}|$$

qui est le nombre maximal de géodésiques (parmi celles choisies) passant par une même arête, pondéré par le nombre de sommets considérés.
On dit que le graphe x est **à courbure quasi-positive** s'il existe un choix de géodésiques tel que ce nombre est d'ordre linéaire en le rayon de la boule, uniformément sur les sommets du graphe :

$$\exists C > 0, \forall x \in S : \forall n \in \mathbb{N} : \qquad K(x,n) \quad \leqslant \quad Cn$$

Cette première condition entraîne l'inégalité de Poincaré, comme l'affirme le :

Lemme 3.4. *Si le graphe est à courbure quasi-positive, alors il vérifie l'inégalité de Poincaré* (P)

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{F}(G)$, $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}$
On a, en notant les arêtes $a = \{a_+, a_-\}$:

$$\forall y, z \in B(x,n) : |f(y) - f(z)| \quad \leqslant \quad \sum_{a \in \gamma_{y,z}} |f(a_+) - f(a_-)|$$

donc

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y) - f(z)| \qquad \leqslant \qquad \sum_{y,z \in B(x,n)} \sum_{a \in \gamma_{y,z}} |f(a_+) - f(a_-)|$$

D'une partle membre de gauche majore :

$$\sum_{y \in B(x,n)} \left| \sum_{z \in B(x,n)} f(y) - f(z) \right| \quad = \quad \sum_{y \in B(x,n)} \left| V(x,n) f(y) - \sum_{z \in B(x,n)} f(z) \right| \quad = \quad V(x,n) \sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)|$$

et d'autre part comme $\forall a = \{a_+, a_-\} \in \Gamma_{x,n} : a_+, a_- \in B(x, 2n)$, le membre de droite minore :

$$\begin{aligned} \sum_{a \subset B(x,2n)} |\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \mid a \in \gamma\}| |f(a_+) - f(a_-)| \quad &\leqslant \quad \max_{a \subset B(x,2n)} |\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \mid a \in \gamma\}| \sum_{a \subset B(x,2n)} |f(a_+) - f(a_-)| \\ &\leqslant \quad \max_{a \subset B(x,2n)} |\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \mid a \in \gamma\}| \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)| \end{aligned}$$

donc finalement :

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \quad \leqslant \quad K(x,n) \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)|$$

donc si $\exists C > 0, \forall x \in S : \forall n \in \mathbb{N} : \quad K(x,n) \leqslant Cn$, alors G vérifie (P). $\square$

Pour obtenir ($\star$), on a recourt à un nombre similaire à $K(x,n)$, cette fois uniforme sur les sommets :

Définition 8. Encore une fois, on fait un choix, sur une boule $B(x,n)$, de géodésiques γ_y reliant le centre x à $y \in B(x,n)$:

$$\Gamma'_{x,n} \quad := \quad \{\gamma_y \mid y \in B(x,n)\},$$

et

$$K(n) \quad := \quad \max_{a \in A} \sum_{x \in S} \frac{|\{\gamma \in \Gamma'_{x,n} \mid a \in \gamma\}|}{V(x,n)}$$

le nombre maximal de ces géodésiques qui passe par une même arête.
On dit que le graphe G est **à courbure positive** si ce nombre est d'ordre linéaire en n :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \qquad K(n) \quad \leqslant \quad Cn$$

Intuitivement, dans un graphe à courbure positive, les géodésiques (ici les chemins minimisants) passent par une même arête un nombre limité de fois : elles ont tendance à "s'écarter", comme elles font sur les variétés à courbure positive (la sphère par exemple).

Cette condition entraîne ($\star$) :

Lemme 3.5. *Si le graphe est à courbure positive, alors il vérifie*

$$\exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{F}(G) : \forall n \in \mathbb{N}^* : \qquad ||f - f_n||_1 \quad \leqslant \quad Cn||\nabla f||_1 \tag{$\star$}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{F}(G)$, $x \in S$ et $n \in N^*$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| \quad &= \quad \frac{1}{V(x,n)} \left| \sum_{y \in B(x,n)} f(x) - f(y) \right| \quad \leqslant \quad \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,n)} |f(x) - f(y)| \\ &\leqslant \quad \frac{1}{V(x,n)} \sum_{\gamma \in \Gamma'_{x,n}} \sum_{a \in \gamma} |f(a_+) - f(a_-)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||f - f_n||_1 \quad = \quad \sum_{x \in S} |f(x) - f_n(x)| \quad &\leqslant \quad \sum_{x \in S} \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,n)} |f(x) - f(y)| \\ &\leqslant \quad \sum_{x \in S} \frac{1}{V(x,n)} \sum_{\gamma \in \Gamma'_{x,n}} \sum_{a \in \gamma} |f(a_+) - f(a_-)| \\ &\leqslant \quad \sum_{a \in A} \left[\sum_{x \in B(a_+,n)} \frac{|\{\gamma \in \Gamma'_{x,n} \mid a \in \gamma\}|}{V(x,n)} \right] |f(a_+) - f(a_-)| \\ &\leqslant \quad K(n)||\nabla f||_1 \end{aligned}$$

donc si encore : $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \quad K(n) \ \leqslant \ Cn$, alors G vérifie ($\star$). □

De plus, un graphe à courbure positive est aussi à courbure quasi-positive.
Avec (P) et ($\star$), on a l'inégalité isopérimétrique qui suit de la propriété 3.3, d'où le :

Théorème 2 (*Coulhon et Saloff-Coste, 1992*)**.** *Soit G un graphe (infini) dénombrable et connexe de degré fini $N \in \mathbb{N}^*$:*

Si G est à courbure positive, alors :

$$\exists C > 0, \quad \forall\ \Omega \subset S \text{ fini} : \quad \frac{|\Omega|}{\phi(C|\Omega|)} \quad \leqslant \quad C|\partial\Omega| \tag{4}$$

4 Condition de courbure-dimension sur un graphe localement fini

Les probabilistes Dominique Bakry et Michel Émery ont défini, en étudiant des processus de diffusions liés à des semi-groupes de Markov [1], un opérateur bilinéaire lié à des opérateurs elliptiques de second ordre sur des variétés (comme le laplacien), qui s'il vérifie un certain critère de courbure-dimension, donne certaines informations utiles. Notamment, dans le cas riemannien, la courbure de Ricci positive correspond exactement à la condition $CD(0,n)$ pour une variété de dimension n (c'est ce qui s'appelle la formule de Bochner, démontrée ici [4]).

Yong Lin et Shing-Tung Yau [6] ont redéfini ce critère dans le cas des graphes localement finis et donné des bornes de courbure et de dimension.
On travaille encore avec un graphe non orienté $G = (S, A)$ connexe.

4.1 Quelques opérateurs

Définition 9. L'opérateur **laplacien** du graphe G est défini sur l'ensemble des fonctions réelles sur le graphe par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^S \\ f \longmapsto \left(x \mapsto \Delta f(x) = \frac{1}{d_x} \sum\limits_{y \sim x} f(y) - f(x) \right) \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire.

Définition 10. On définit l'opérateur bilinéaire appelé **carré du champ** sur $\mathbb{R}^S$:

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^S \\ f, g \longmapsto \frac{1}{2}(\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f) \end{cases}$$

ainsi que le **carré du champ itéré** :

$$\Gamma_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^S \\ f, g \longmapsto \frac{1}{2}(\Delta\Gamma(f,g) - \Gamma(f, \Delta g) - \Gamma(g, \Delta f) \end{cases}$$

Ces opérateurs sont bilinéaires, symétriques et définis positifs. On les dénominera surtout par Γ et Γ_2.

Définition 11. On dit que le graphe G vérifie la **condition de courbure-dimension** $CD(K, m)$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $m \in [1, +\infty]$ si, $\forall f \in \mathbb{R}^S$:

$$\Gamma_2(f, f) \quad \geqslant \quad \frac{1}{m}(\Delta f)^2 + K\Gamma(f, f)$$

On voit facilement, si $m' > m$ et $K > K'$:

$$CD(K, m) \Rightarrow CD(K', m)$$

$$CD(K, m) \Rightarrow CD(K, m')$$

Le critère est plus restrictif pour un K plus grand, et pour un m plus petit. On parle alors de borne (basse) de courbure (ici la courbure est $\geqslant K$) et de borne (haute) de dimension (ici $\leqslant m$).

4.2 La condition de Bakry-Émery pour les graphes

Dans leur article de 2010 [6], Lin et Yau démontrent une borne de courbure de -1, légèrement affinée dans le cas où le graphe est de degré fini, ainsi qu'une borne de dimension 2 :

Théorème 3 (*Lin et Yau, 2010*)**.** *Un graphe localement fini vérifie*

$$CD\left(-1, 2\right)$$

De plus, si son degré est au plus $d \in \mathbb{N}$, il vérifie :

$$CD\left(\frac{2}{d} - 1, 2\right)$$

On se place toujours sur un graphe $G = (S, A)$ muni des opérateurs définis précédemment. Pour démontrer ce théorème, on se sert d'un autre opérateur ainsi que de quelques lemmes calculatoires.

Définition 12. Le **carré du gradient** est l'opérateur sur $\mathbb{R}^S$ défini par :

$$|\nabla f|^2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^S & \longrightarrow & \mathbb{R}^S \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto |\nabla f|^2(x) = \frac{1}{d_x} \sum\limits_{y \sim x} (f(y) - f(x))^2\right) \end{array} \right.$$

Un premier lemme permet d'exprimer $\Gamma(f, f)$ avec les opérateurs Δ et $|\nabla f|^2$:

Lemme 4.1.

$$\forall f \in \mathbb{R}^S : \qquad \Gamma(f, f) \quad = \quad \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \quad = \quad \frac{\Delta f^2}{2} - f \Delta f$$

Démonstration. Soient $f \in \mathbb{R}^S$ et $x \in S$:

$$\begin{aligned} 2f\nabla f(x) &= 2f(x)\frac{1}{d_x}\sum_{y \sim x} f(y) - f(x) \\ &= -2f(x)^2 + \frac{2f(x)}{d_x}\sum_{y \sim x} f(y) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta f^2(x) &= \frac{1}{d_x}\sum_{y \sim x} f(y)^2 - f(x)^2 \\ &= \frac{1}{d_x}\sum_{y \sim x}(f(y) - f(x))^2 - 2f(x)^2 + 2f(x)f(y) \\ &= |\nabla f|^2(x) - 2f(x)^2 + \frac{2}{d_x}f(x)\sum_{y \sim x} f(y) \\ &= |\nabla f|^2(x) + 2f\Delta f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\Gamma(f, f) \quad = \quad \frac{1}{2}\Delta f^2 - f\Delta f \quad = \quad \frac{1}{2}|\nabla f|^2$$

□

On utilise ensuite une idée déjà utilisée dans le cadre des variétés, qui est de calculer le laplacien du gradient :

Lemme 4.2. $\forall f : \mathbb{R} \to S : \forall x \in S$:

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla f|^2(x) \quad = \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}\frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y} \qquad & (f(x)-2f(y)+f(z))^2 \\ - \quad & 2(f(x)-2f(y)+f(z))(f(x)-f(y))\end{aligned}$$

Cette égalité se montre en exprimant le terme de gauche et par quelques lignes de calcul.
On peut grâce à ces lemmes techniques démontrer le théorème 3 par de longs calculs :

Démonstration. Soient $f : \mathbb{R} \to S$ et $x \in S$: Il nous faut calculer

$$\Gamma_2(f,f) \quad = \quad \frac{1}{2}(\Delta\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\Delta g) - \Gamma(g,\Delta f)$$

Commençons par exprimer le laplacien de $f\Delta f$, puis $\Gamma(f,\Delta f)$:

$$\begin{aligned}\Delta(f\Delta f)(x) \quad &= \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} f\Delta f(y) - f\Delta f(x) \\ &= \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} f(y)\Delta f(y) - f(y)\Delta f(x) + f(y)\Delta f(x) - f(x)\Delta f(x) \\ &= \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} f(y)(\Delta f(y) - \Delta f(x)) + (f(y)-f(x))\Delta f(x) \\ &= \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} [(f(y)-f(x))(\Delta f(y)-\Delta f(x)) + f(x)(\Delta f(y)-\Delta f(x))] + (\Delta f(x))^2 \\ &= \quad \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x} \quad (f(y)-f(x))(\Delta f(y)-\Delta f(x)) \quad + f(x)\Delta\Delta f(x) + (\Delta f(x))^2\end{aligned}$$

Or comme :

$$\Gamma(f,\Delta f) \quad = \quad \frac{1}{2}(\Delta(f\Delta f) - f\Delta\Delta f - (\Delta f)^2),$$

on obtient :

$$\Gamma(f,\Delta f)(x) \quad = \quad \frac{1}{2d_x}\sum_{y\sim x} \quad (f(y)-f(x))(\Delta f(y)-\Delta f(x)). \tag{5}$$

On conclut grâce à l'expression précédente (5), la définition (10) du Γ_2 et les lemmes calculatoires 4.1 et 4.2 :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2(f,f)(x) &= \frac{1}{2}(\Delta\Gamma(f,f)(x) - 2\Gamma(f,\Delta f)(x)) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2(x) - \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))(\Delta f(y)-\Delta f(x))\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}\left[\frac{1}{2d_y}\Big[\sum_{z\sim y}(f(x)-2f(y)+f(z))^2\right. \\
&\qquad\qquad - 2(f(x)-f(y))(f(x)-2f(y)+f(z))\Big] \\
&\qquad \left. - (f(y)-f(x))(\Delta f(y)-\Delta f(x))\right] \\
&= \frac{1}{4d_x}\sum_{y\sim x}\frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y}(f(x)-2f(y)+f(z))^2 \\
&+ \frac{1}{2d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))\frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y}f(z)-f(y)+f(x)-f(y) \\
&- \frac{1}{2d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))\left[\frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y}f(z)-f(y) \quad - \quad \Delta f(x)\right] \\
&= \frac{1}{4d_x}\sum_{y\sim x}\frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y}(f(x)-2f(y)+f(z))^2 \\
&- \frac{1}{2d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))^2 \quad + \frac{\Delta f(x)}{2d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x)) \\
&\geqslant \frac{1}{4d_x}\sum_{y\sim x}\frac{(2f(x)-2f(y))^2}{d_y} \\
&- \frac{1}{2d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))^2 \quad + \frac{1}{2}(\Delta f(x))^2 \\
&\geqslant \frac{1}{d_x}\frac{1}{d}\sum_{y\sim x}(f(x)-f(y))^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))^2 + \frac{1}{2}(\Delta f(x))^2 \\
&= \left(\frac{1}{d}-\frac{1}{2}\right)|\nabla f|^2(x) + \frac{1}{2}(\Delta f(x))^2 \\
&= \left(\frac{2}{d}-1\right)\Gamma(f,f)(x) + \frac{1}{2}(\Delta f(x))^2
\end{aligned}
$$

Dans les dernières lignes, on a minoré $\frac{1}{d_x}$ par $\frac{1}{d}$, en supposant que le graphe est de degré fini $d \in \mathbb{N}^*$. Si le degré n'est pas borné, on ne peut minorer le terme devant $\Gamma(f,f)$ que par -1, ce qui nous donne la forme générale $CD(-1,2)$. $\square$

Remarque. On n'a pas d'interprétation claire de la borne de dimension 2, et on souhaiterait l'affiner pour la lier au degré d. C'est possible dans le cas des graphes de Cayley (qui sont définis à la partie suivante) grâce à une formule de Bochner discrète, qui entraîne que cette borne est liée au degré [9].

5 La courbure de comparaison de Duchin, Bar-Natan, Kropholler

Dans les années 2000, Yann Ollivier a défini une notion de courbure sur des espaces métriques, et en particulier pour des espaces discrets tels que les graphes, en utilisant l'interpétation géométrique de la courbure de Ricci classique suivante : la courbure mesure à quel point des points "correspondants" sur deux sphères sont plus ou moins proches (en moyenne) que les centres respectifs des sphères. Faire correspondre des points de deux sphères peut être complexe : sur les variété, on utilise le transport parallèle ; sur les espaces métriques discrets Ollivier utilise le transport optimal (donc des marches aléatoires), et il vérifie que cette définition est (au premier ordre) compatible avec celle classique sur les variétés.

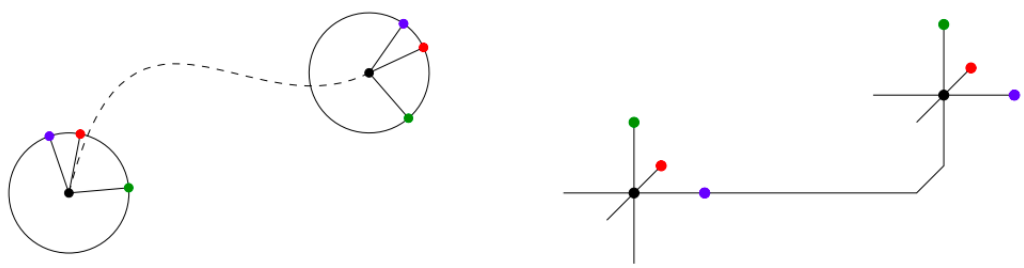

FIGURE 1 – Distance de comparaison, tirée de [2]

Dans le cas des graphes de Cayley (de groupes finiment engendrés), faire correspondre des points est plus simple car les arêtes (et donc les voisins d'un centre) sont étiquetées par les générateurs. C'est en faisant cette observation et en s'inspirant des travaux d'Ollivier que Moon Duchin et alii [2] ont défini une courbure dite de conjugaison, sur les graphes de Cayley de groupes finiment engendré.

Cette approche de la courbure dépend cependant du système de générateurs du groupe choisi pour construire son graphe de Cayley.
Dans la suite, on travaille avec un groupe G muni d'un système de générateurs S fini, symétrique et n'incluant pas l'élément neutre.

Définition 13. Soit G un groupe. On dit qu'il est de **type fini** s'il est engendré par un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on dit d'une partie $S \subset G$ qu'elle est un **système de générateurs** de G si elle est finie, symétrique (par rapport à la loi de G) et ne contient pas l'élément neutre.

Dans ce cas, on définit le **graphe de Cayley** du groupe G relativement au système de générateurs S comme le graphe dont les sommets sont les éléments de G et les arêtes sont les $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\}$. On note ce graphe $\Gamma(G, S)$.

On note alors, pour $x, y \in G$:
la **taille** de x : $|x| \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in S^n, x = a_1 ... a_n\}$
la **distance** entre x et y : $d(x, y) \coloneqq |y^{-1}x|$

Définition 14. La **distance de conjugaison** est définie pour $x, y \in G$ par :

$$\mathcal{C}(x, y) \coloneqq \frac{1}{|S|} \sum_{a \in S} d(xa, ya) = \frac{1}{|S|} \sum_{a \in S} |a^{-1}y^{-1}xa|$$

Cette distance est une moyenne des distances entre les voisins de x et les voisins de y.

On utilise pour définir la courbure d'un élément $g \in G$, la taille moyenne des conjugués de l'élément par des générateurs :

$$GenCon(g) \coloneqq \frac{1}{|S|} \sum_{a \in S} |a^{-1} g a| = \mathcal{C}(e, g)$$

La **courbure de Ricci de conjugaison** de l'élément est alors :

$$\kappa(g) \coloneqq 1 - \frac{GenCon(g)}{|g|}$$

La courbure est négative lorsque les conjugués de g sont en moyenne plus long que g.

Enonçons quelques propriétés préliminaires :

Proposition 5.1. *(1) La courbure est nulle sur le centre du groupe :*

$$\forall g \in Z(G) : \kappa(g) = 0$$

En particulier, les groupes abéliens sont de courbure nulle
(2) Si G est fini et $S = G \backslash \{e\}$, la courbure est nulle
(3)

$$\kappa(e) = 0$$

et

$$\forall a \in S : \kappa(a) = 0$$

(4) Tout mot $w \in G$ vérifiant $|w^k| = k|w|$ est de courbure négative
(5) $\kappa \leqslant 1$
(6)(Amortissement) Si G est infini, alors la courbure moyenne tend vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|B_n|} \sum_{g \in B_n} |\kappa(g)| = 0$$

La courbure dépend du système de générateurs. En effet, si $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, il existe deux systèmes de générateurs tels que le cycle $\sigma = (1...n) \in \mathfrak{S}_n$ a une courbure aussi proche que l'on veut (à condition d'augmenter n) de respectivement 2 ou $\frac{1}{2}$. Ces systèmes de générateurs sont :

$$S_+ \coloneqq \mathfrak{S}_n \backslash \{e, \sigma, \sigma^{-1}\} \quad \text{et} \quad S_- \coloneqq \{(12), (23), ..., (n-1\ n), \sigma, \sigma^{-1}\}$$

On arrive au résultat intéressant de la publication. On a vu que les groupes abéliens sont plats, on a une réciproque faible, utilisant l'abélianité virtuelle, dont on rappelle la définition :

Définition 15. On dit qu'un groupe vérifie **virtuellement** une propriété si un sous-groupe d'indice fini la vérifie.

Par exemple, un groupe est virtuellement fini si et seulement si il est fini. Tout groupe fini est virtuellement abélien.

Théorème 4. *Si la courbure des générateurs est nulle, alors le groupe est virtuellement abélien.*

Démonstration. Pour montrer qu'un groupe est virtuellement abélien, il suffit de montrer que son centre (abélien par définition) est d'indice fini. On vérifie ça en écrivant le centre du groupe comme l'intersection des centralisateurs des générateurs :
Si tous les générateurs sont de courbure nulle, alors

$$\forall a \in S : GeoCon(a) = 1$$

donc $\forall s \in S : |s^{-1}as| = 1$ soit $s^{-1}as \in S$
mais comme S est un système de générateurs, on a encore : $\forall g \in G : g^{-1}ag \in G$, c'est-à-dire que l'action par conjugaison de G sur lui-même envoie a dans S, soit : $Orb_G a \subset S$ donc :

$$[G : Stab_G\ a] = |Orb_G\ a| \leqslant |S| < +\infty$$

Or $Stab_G\ a = \{g \in G \mid ag = ga\} = Z(a)$ est le centralisateur de a, or $Z(G) = \cap_{a \in S} Z(a)$ car S génère G, donc $Z(G)$ est d'indice fini dans G et G est virtuellement abélien. □

6 La courbure de transport d'Ollivier

On a déjà parlé de la courbure de Ricci définie par Ollivier sur des espaces métriques discrets [8]. On présente ici une définition adaptée au cas particulier des graphes, qui ne s'encombre pas de notions de mesures et de marches aléatoires.

On se place comme précédemment sur un graphe $G = (S, A)$ connexe.

Définition 16. On définit la **distance de transport** pour $x, y \in S$ par :

$$\mathcal{T}(x,y) \coloneqq \sup_f \left(\frac{1}{d_x} \sum_{z\sim x} f(z) - \frac{1}{d_y} \sum_{z\sim y} f(z) \right)$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des fonctions 1-lipshitziennes sur le graphe
La **courbure de transport** entre x et y est alors :

$$\kappa^{\mathcal{T}}(x,y) \coloneqq 1 - \frac{\mathcal{T}(x,y)}{d(x,y)}$$

Intuitivement, cette courbure (définie pour deux sommets du graphe) compare la distance entre les deux sommets et la moyenne des distances entre les voisins de ces deux sommets.

On peut comparer cette courbure à celle de conjugaison de Duchin et alii :

Proposition 6.1. *Sur un graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré :*

$$\mathcal{T} \leqslant \mathcal{C} \text{ donc } \kappa^{\mathcal{T}} \geqslant \kappa$$

où κ est la courbure de conjugaison
En particulier, la courbure de transport d'un graphe de Cayley d'un groupe abélien est positive.

Démonstration. Soient G un groupe finiment engendré et S un système de générateurs fini, symétrique et sans l'élément neutre
Soient $x, y \in G$ et $f : S \mapsto \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_x} \sum_{z\sim x} f(z) - \frac{1}{d_y} \sum_{z\sim y} f(z) &= \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} f(xs) - f(ys) \\
&\leqslant \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} |f(xs) - f(ys)| \\
&\leqslant \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} d(xs, ys) \\
&= \mathcal{C}(x,y)
\end{aligned}$$

donc

$$\kappa^{\mathcal{T}}(x,y) \geqslant \kappa(x,y)$$

□

Yin et Lau [6] montrent, avec cette définition, une minoration de la courbure pour des voisins (qui donne assez d'information d'après [7]) :

Proposition 6.2. *Si G est infini et connexe, si $x, y \in S$ sont voisins tels que $d_x, d_y \geqslant 2$, alors :*

$$\kappa^{\mathcal{T}}(x,y) \geqslant \frac{2}{d_x} + \frac{2}{d_y} - 2$$

Démonstration. L'inégalité revient à montrer, pour toute fonction $f : S \mapsto \mathbb{R}$ 1-lipshitzienne :

$$\frac{1}{d_x}\sum_{z\sim x} f(z) - \frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y} f(z) \leqslant 3 - \frac{2}{d_x} - \frac{2}{d_y}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_x}\sum_{z\sim x} f(z) - \frac{1}{d_y}\sum_{z\sim y} f(z) &= \frac{f(y)}{d_x} - \frac{f(x)}{d_y} + \frac{1}{d_x}\sum_{\substack{z\sim x\\ z\neq y}} f(z) - \frac{1}{d_y}\sum_{\substack{z\sim y\\ z\neq x}} f(z)\\
&= \left(\frac{d_x-1}{d_x} - \frac{1}{d_y}\right) f(x) + \left(\frac{1}{d_x} - \frac{d_y-1}{d_y}\right) f(y)\\
&\quad + \frac{1}{d_x}\sum_{\substack{z\sim x\\ z\neq y}} [f(z)-f(x)] - \frac{1}{d_y}\sum_{\substack{z\sim y\\ z\neq x}} [f(z)-f(y)]\\
&= \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y}\right)(f(x)-f(y))\\
&\quad + \frac{1}{d_x}\sum_{\substack{z\sim x\\ z\neq y}} [f(z)-f(x)] - \frac{1}{d_y}\sum_{\substack{z\sim y\\ z\neq x}} [f(z)-f(y)]\\
&\leqslant \left(1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y}\right)|f(x)-f(y)|\\
&\quad + \frac{1}{d_x}\sum_{\substack{z\sim x\\ z\neq y}} |f(z)-f(x)| + \frac{1}{d_y}\sum_{\substack{z\sim y\\ z\neq x}} |f(z)-f(y)|\\
&\leqslant 1 - \frac{1}{d_x} - \frac{1}{d_y} + \frac{d_x-1}{d_x} + \frac{d_y-1}{d_y}\\
&= 3 - \frac{2}{d_x} - \frac{2}{d_y}
\end{aligned}$$

On obtient la seconde inégalité par la lipschitzianité de f. □

Références

[1] D. Bakry et M. Émery. « Diffusions hypercontractives ». In : *Séminaire de Probabilités* XIX (1985), p. 177-206. url : http://www.numdam.org/article/SPS_1985__19__177_0.pdf.

[2] Assaf Bar-Natan, Moon Duchin et Robert Kropholler. *Conjugation curvature for Cayley graphs*. prépublication. url : https://arxiv.org/pdf/1712.02484.pdf.

[3] Thierry Coulhon et Laurent Saloff-Coste. « Isopérimétrie pour les graphes et les variétés ». In : *Revista Matemática Iberoamericana* 9.2 (1993).

[4] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Sous la dir. de Springer. T. 171. 2004. Chap. The Bochner Technique, p. 333-363. isbn : 978-3-540-20493-0. doi : 10.1007/978-3-642-18855-8.

[5] Michael Gromov. « Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by Jacques Tits). » In : *Publications mathématiques de l'IHES* 53 (1981), p. 53-78. url : http://www.numdam.org/item/PMIHES_1981__53__53_0.

[6] Yong Lin et Shing-Tung Yau. « Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs ». In : *Mathematical research letters* 17.2-3 (mar. 2010), p. 343-356. issn : 1073-2780. doi : 10.4310/MRL.2010.v17.n2.a13.

[7] Yann Ollivier. « Ricci curvature of Markov chains on metric spaces ». In : *Journal of Functional Analysis* 256.3 (2009), p. 810-864.

[8] Yann Ollivier. « Ricci curvature of metric spaces ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 345 (2007), p. 643-646.

[9] Hervé Pajot. « The discrete Bochner formula for Cayley graphs ». In : (). communication personnelle.