Travail d'études et de recherche

Institut Fourier
Université Grenoble Alpes

Espaces topologiques finis

Nascimo FOURNIER
encadré par
Rémi MOLINIER

19 mai 2023

Table des matières

Introduction

Même si elle peut paraître anecdotique à première vue, la classe des espaces topologiques finis est en fait très riche, par exemple d'un point de vue homotopique. Michael C. McCord en a fait une étude approfondie dans [1]. Nous verrons qu'elle est liée à la classe des complexe simpliciaux.La classe des espaces topologiques finis est en fait un cas particulier d'une classe plus large : les A-espaces. Nous étudierons plus en détails ces derniers, où s'arrête leurs avantages et quelles propriétés les espaces topologiques finis présentent en plus. Ces notions seront définies par la suite. Le fil conducteur de ce travail d'études et de recherche est de prouver le résultat suivant :

Théorème de McCord 0

— Pour tout espace topologique fini X, il existe un complexe simplicial fini $\mathcal{K}$ et une équivalence faible d'homotopie $f : |\mathcal{K}| \longrightarrow X$.

— Pour tout complexe simplicial fini $\mathcal{K}$, il existe un espace topologique fini X et une équivalence faible d'homotopie $f : |\mathcal{K}| \longrightarrow X$.

Mais tout d'abord, familiarisons-nous avec ces notions et leurs propriétés élémentaires.

1 Premières définitions

Définition 1 (A-espace)**.** Un *A-espace* est un espace topologique dans lequel toute intersection d'ouverts est ouverte.

Définition 2 (Espace topologique fini)**.** Il s'agit d'un ensemble fini muni d'une topologie.

Remarque. Les espaces topologiques finis sont des A-espaces (en effet, sur un espace fini, toute intersection est finie).

Définition 3 (Ensemble pré-ordonné)**.** Un *pré-ordre* sur un ensemble est une relation réflexive et transitive.
Un *ensemble pré-ordonné* est un ensemble muni d'un pré-ordre.

Théorème 4. *Les A-espaces et les ensembles pré-ordonnés sont les mêmes objets vus différemment, i.e. on peut munir tout A-espace d'un pré-ordre naturel, et on peut munir tout ensemble pré-ordonné d'une topologie naturelle le munissant d'une structure de A-espace.*

Démonstration. · Soit X un A-espace.
Soit $x \in X$. Définissons l'*ouvert minimal* U_x de x par l'intersection de tous les ouverts de X contenant x. Remarquons que, par intersection d'ouverts, il s'agit d'un ouvert.

Montrons que l'ensemble des ouverts minimaux constitue une base pour la topologie de X, que l'on appellera *base minimale* de X :
Pour tout ouvert U de X, on a $U \subset \bigcup\limits_{x\in U} U_x$,
et pour tout $x \in U$, $U_x \subset U$ par définition de U_x, donc $\bigcup\limits_{x\in U} U_x \subset U$.
Ainsi, on a $U = \bigcup\limits_{x\in U} U_x$.
Toute autre base contient la base minimale. En effet, pour $x \in X$, U_x est réunion d'ouverts de la deuxième base. L'un contient donc x, il coïncide alors avec U_x.

On définit ensuite la loi $\leq$ sur X par $x \leq y$ si $x \in U_y$.
Montrons qu'il s'agit d'un pré-ordre :
- On a $x \in U_x$, donc $x \leq x$: la loi est bien réflexive.
- Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors tout ouvert contenant y contient aussi x, donc en particulier U_z, qui contient y, contient aussi x. Ainsi $x \leq z$: la loi est bien transitive.
On a donc un pré-ordre naturel sur l'espace topologique X.

· Soit X un ensemble pré-ordonné. On définit une topologie sur X par la base $\{y \in X;\ y \leq x\}_{x\in X}$.
Pour montrer qu'il s'agit bien d'un A-espace, il reste à montrer que toute intersection d'ouverts est ouverte.
On notera $U'_x = \{y \in X\ ;\ y \leq x\}$.
Soit $\{U_i\ ;\ \forall\ i \in I\}$ une famille d'ouverts de X. Montrons que $\bigcap\limits_{i\in I} U_i = \bigcup\limits_{z\in \bigcup\limits_{i\in I} U_i} U'_z$:
- on a l'inclusion $\bigcap\limits_{i\in I} U_i \subset \bigcup\limits_{z\in \bigcup\limits_{i\in I} U_i} U'_z$ car pour tout $z \in X$, $z \in U'_z$;
- soit $z \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$. Alors pour tout $i \in I$, $z \in O_i$ qui est ouvert, donc $U'_z \subset O_i$, donc $U'_z \subset \bigcap\limits_{i\in I} U_i$, d'où l'inclusion réciproque.

· Remarquons que si $y \leq x$, alors $y \in U_x$; et inversement, si $y \in U_x$, alors $y \leq x$.
Ainsi, les applications qui à un A-espace associe l'espace pré-ordonné de la première partie, et celle qui à un espace pré-ordonné associe l'espace topologique de la deuxième partie, sont inverses l'une de l'autre.

□

Définition 5 (T_0-séparation)**.** Un *T_0-A-espace* est un A-espace vérifiant l'*axiome T_0 de séparation* : pour tout couple de points distincts, il existe un ouvert contenant un et un seul de ces deux points.

Proposition 6. *L'anti-symétrie pour un pré-ordre sur un A-espace correspond exactement à l'axiome de T_0-séparation de l'espace topologique correspondant.*

Démonstration. · Soit X un espace muni d'une relation d'ordre $\leq$.
Soient $x \neq y \in X$.
Si x et y ne sont pas comparables ou $x < y$, alors $y \notin U_x$.
Donc X est T_0-séparé.

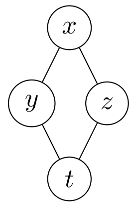
· Soit X un A-espace T_0-séparé, soient x et y dans X tels que $x \leq y$ et $y \leq x$.
Alors tout ouvert U de X contenant x contient aussi y, et inversement. Donc par T_0-séparation, $x = y$.
Ainsi, le pré-ordre associé à la topologie de X est une relation d'ordre.

□

Remarque. Ceci montre donc que les T_0-A-espaces sont en correspondance avec les espaces partiellement ordonnés.

Définition 7 (Diagramme de Hasse)**.** Soit X un espace partiellement ordonné.
Son *diagramme de Hasse* est un graphe dont les sommets sont les points de X ; et les arêtes sont les couples (x, y) si x > y et $\nexists\, z \in X,\ x > z > y$.
Si (y, x) est une arête, on dira que x *couvre* y, on écrira $y \prec x$, et elle sera représentée sur le graphe verticalement, avec x en haut.

Exemple. L'ensemble à 4 éléments $\{x, y, z, t\}$ tels que $t < y < x$ et $t < z < x$ est représenté par le diagramme de Hasse ci-contre.



2 Premières propriétés

Définition 8 (Elément maximal et maximum)**.** Soient X un espace partiellement ordonné et $x \in X$.
x est dit *maximal* si

$$\forall\, y \in X,\ y \geq x \Rightarrow y = x.$$

x est un *maximum* si $\forall\, y \in X,\ y \leq x$.

On définit de la même façon un *élément minimal* et un *minimum*.

Proposition 9. *Un espace fini partiellement ordonné admet un maximum si et seulement si il admet un unique élément maximal.*

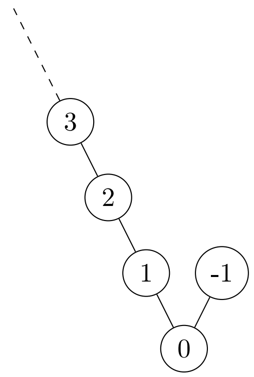
Démonstration. Soit X un espace fini partiellement ordonné.

· Supposons que X admette un maximum x.
Alors pas définition, x est un élément maximal (car la relation est anti-symétrique).
Soit y un élément maximal. Alors $y \leq x$ car x est un maximum, donc comme y est un élément maximal, $y = x$.

· Réciproquement, supposons que X admette un élément maximal x mais pas de maximum, alors il existe $x' \in X$ tel que $x' > x$ ou x et x' ne sont pas comparables.
Le premier cas est impossible car x est un élément maximal.
Soit $U = \{y \in X;\ x \leq y\}$. Alors U est fini parce que X l'est, donc admet un maximum x'' (existe car la loi est une relation d'ordre). Alors x'' est un élément maximal de X.
En effet, si $y \geq x$, alors par transitivité $y \geq x'$, donc $y \in U$, donc par maximalité de x'' dans U, $y \leq x''$, i.e. $y = x''$.
Mais $x'' \ngtr x$ car x est maximal, et $x'' \nleq x$ car sinon par transitivité, $x' \leq x$, ce qui n'est pas.
Ainsi $x'' \neq x$ sont deux éléments maximaux de X.
D'où le résultat par contraposée.

□

Remarque. Ceci n'est en revanche pas vrai pour tous les espaces partiellement ordonnés, comme le montre l'exemple suivant :
$\mathbb{N} \cup \{-1\}$ muni de l'ordre partiel donné par la valeur absolue. Son diagramme de Hasse est celui ci-dessous.
-1 est un élément maximal de la partie de droite, mais la partie de gauche n'a pas d'élément maximal : cet ensemble a un unique élément maximal mais pas de maximum.



$\mathbb{N} \cup \{-1\}$

Définition 10 (chaîne et antichaîne)**.** Une *chaîne* dans un ensemble partiellement ordonné est une partie dont les éléments sont deux-à-deux comparables.
Une *antichaîne* est une partie dont les éléments sont deux-à-deux non comparables.

Définition 11 (down-set et up-set)**.** Une partie U d'un ensemble pré-ordonné X est un *down-set* si

$$\forall\ (x,y) \in X^2,\ \begin{cases} x \in U \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow y \in U.$$

De même pour un *up-set*.

Remarque. Pour un A-espace, les ouverts correspondent exactement aux down-sets et les fermés aux up-sets.

Proposition 12. *Si X est un espace T_0-séparé fini, alors les ouverts de X sont en bijection avec les antichaînes.*

Démonstration. · Soit U un ouvert de X. Alors U est un down-set. Soit A_U l'ensemble des éléments maximaux de U.
Alors A_U est une antichaîne de X. En effet, pour tous $x, y \in A_U$ si $x \leq y$, alors par définition de A_U, comme x est maximal, $x = y$.

· Soit maintenant A une antichaîne de X.
Soit $U_A = \bigcup\limits_{a \in A} U_a$. Alors U_A est un down-set, donc un ouvert de X.

· Cette construction donne bien une correspondance bijective :
Si A_U est l'antichaîne des éléments maximaux d'un ouvert U, alors $U = \bigcup\limits_{a \in A_U} U_a$ est bien l'ouvert U_{A_U} défini par l'antichaîne.
Si U_A est l'ouvert défini par une antichaîne A, alors $A_{U_A} = A$.

□

Remarque. Ce n'est en revanche par le cas pour tous les A-espaces. Par exemple dans $\mathbb{N}$, la construction précédente associe l'antichaîne vide aux deux ouverts $\emptyset$ et $\mathbb{N}$, car ce dernier n'a pas d'élément maximal et est totalement ordonné, donc ne contient pas d'antichaîne.

Définition 13 (Adhérence)**.** Soient X un A-espace et x dans X.
On écrira F_x pour l'adhérence de $\{x\}$ dans X, de sorte que :

$$y \in F_x \Longleftrightarrow x \in U_y$$

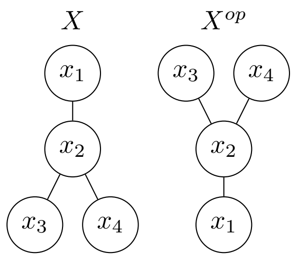
et
$$F_x = \{y \in X,\ y \geq x\}$$

Remarque. On notera U_x^X, U_x^Y, F_x^X, F_x^Y si l'ensemble X ou Y dans lequel on se place n'est pas clair, en particulier si $x \in X \cap Y$.

Définition 14 (Ensemble opposé ou dual)**.** En remarquant que pour un A-espace X, l'ensemble des fermés définit aussi une topologie, on appellera X avec cette topologie *ensemble opposé* ou *dual* de X, et on le notera X^{op}.

Remarque. Dans ce cas, l'ordre de X^{op} est l'inverse de celui de X, i.e. $x \leq y \iff y \leq^{op} x$.
Si $x \in X$, on a $U_x^{X^{op}} = F_x^X$.

Exemple. On a



Remarque. Les ouverts de $A \subset X$ étant l'intersection des ouverts de X avec A, si X est fini on obtient alors pour tout $a \in A$: $U_a^A = U_a^X \cap A$.

Remarque. Si X et Y sont finis, on a alors $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$.
Montrons cela[1].
Tout d'abord, $U_{(x,y)} \subset U_x \times U_y$ car U_x et U_y sont des ouverts respectivement de X et Y, dont le produit cartésien contient (x, y).
Puis, soient $(x', y') \in U_x \times U_y$ et $\mathcal{U}$ un ouvert de $X \times Y$ contenant (x, y).
Alors $\mathcal{U}$ est réunion d'ouverts de la forme $U \times V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y, donc il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que $x \in U\ et\ y \in V$ et $U \times V \subset \mathcal{U}$.
Mais par définition de $U_x\ et\ U_y$, $x' \in U_x \subset U\ et\ y' \in U_y \subset V$, donc $(x', y') \in \mathcal{U}$.
Ainsi, $(x', y') \in U_{(x,y)}$.

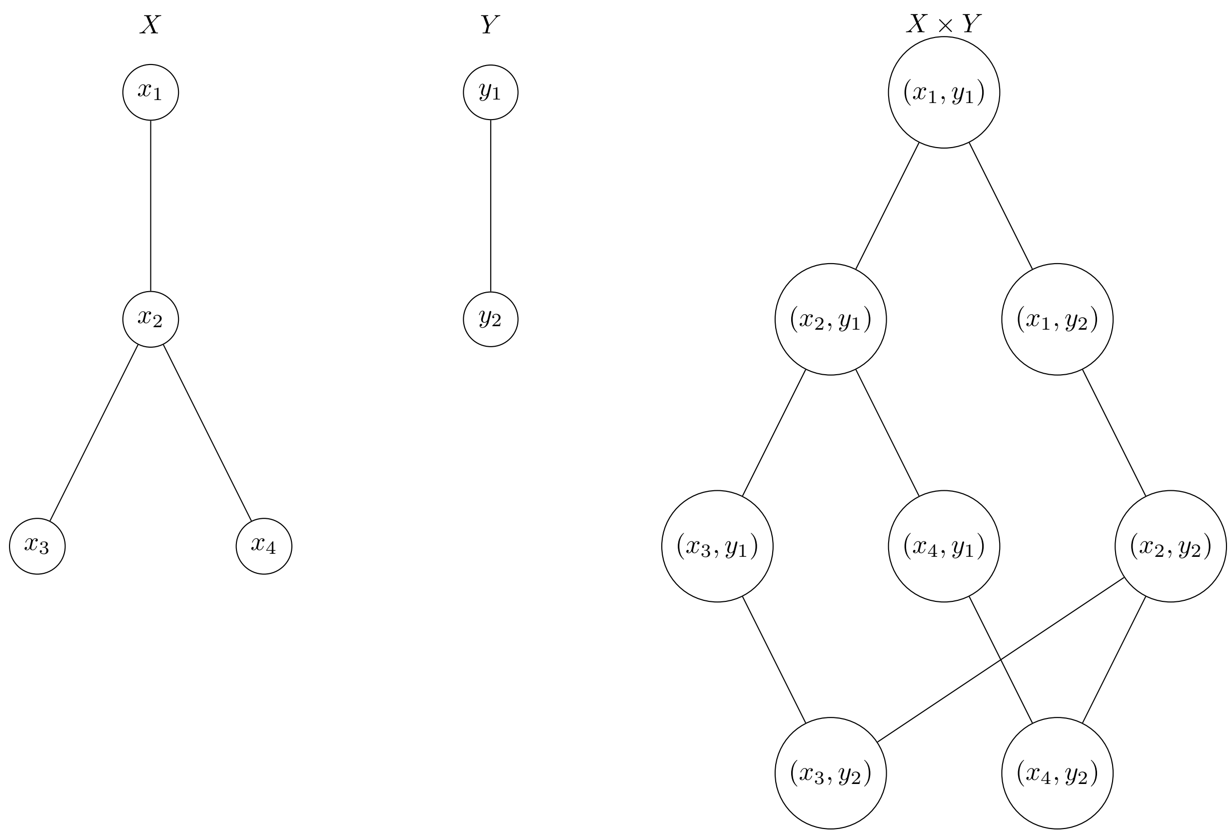
Définition 15 (Pré-ordre relatif)**.** Soient X un espace pré-ordonné et $A \subset X$. On défini le *pré-ordre relatif à* A, $\leq_A$, par la restriction du pré-ordre $\leq$ de X à A. On remarque que
$$\forall\ a, b \in A,\ a \leq_A b \Leftrightarrow a \in U_b^A.$$

Proposition 16. *La remarque précédente conduit à ce résultat : Soient X et Y deux A-espaces, et (x, y) et $(x', y') \in X \times Y$. Alors*
$$(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y') \iff \left\{ \begin{array}{l} x \leq_X x' \\ y \leq_Y y' \end{array} \right. .$$

Démonstration. $(x, y) \leq_{X\times Y} (x', y') \iff (x, y) \in U_{x' \times y'} = U_{x'} \times U_{y'} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in U_{x'} \\ y \in U_{y'} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \leq_X x' \\ y \leq_Y y' \end{array} \right. .$ □

Exemple. Si X, Y et $X \times Y$ sont respectivement représentés par les diagrammes suivant :

1. Une définition de la topologie produit : 83



3 Applications, homotopies et connexité.

Définition 17 (Ordre préservé)**.** Soient X et Y deux espaces pré-ordonnés et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
On dit que f *préserve l'ordre* si

$$\forall\ (x, x') \in X^2,\ x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$

Proposition 18. *Dans le même cadre, f est continue pour les topologies induites par les pré-ordre si et seulement si f préserve l'ordre.*

Démonstration. · Supposons que f soit continue, et soient $x \leq x' \in X$.
Alors $f^{-1}(U_{f(x')})$ $(\subset X)$ est un ouvert contenant x',
donc $x \in U_{x'} \subset f^{-1}(U_{f(x')})$, et ainsi $f(x) \leq f(x')$,
donc f préserve l'ordre.

· Supposons maintenant que f préserve l'ordre. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout ouvert d'une base de la topologie de Y est un ouvert de X.
Soit $y \in Y$. Il suffit donc de montrer que $f^{-1}(U_y)$ est ouvert.
Soit $x \in f^{-1}(U_y)$. Soit $x' \leq x$. Alors $f(x') \leq f(x) \leq y$, donc $x' \in f^{-1}(U_y)$, donc $f^{-1}(U_y)$ est un down-set, i.e. un ouvert.
Ainsi, f est bien continue.

$\square$

Définition 19 (Application duale)**.** Soient X et Y deux espaces et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
Alors l'application duale de f est $\begin{array}{rccc} f^{op} : & X^{op} & \longrightarrow & Y^{op} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Proposition 20. *Si X et Y sont des A-espaces, alors on a*

$$f \text{ continue} \iff f^{op} \text{ continue}$$

Démonstration. Supposons que f soit continue. Alors l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X.
Or les fermés de X (resp. Y) sont les ouverts de X^{op} (resp. Y^{op}),
donc f^{op} est continue.
La réciproque s'obtient en remarquant que pour $\mathfrak{a} \in \{f, X, Y\}$, $(\mathfrak{a}^{op})^{op} = \mathfrak{a}$. □

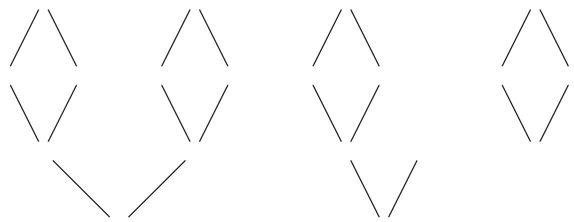
Proposition 21. *Si x et y sont comparables dans X ensemble pré-ordonné, alors il existe un chemin continu de x à y dans X, i.e. une application continue $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$.*

Démonstration. Supposons que $x \leq y$.
Soit $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\alpha(1) = y$ et $\forall\, t \in [0,1[$, $\alpha(t) = x$. Soit U un ouvert de X.
Si $y \in U$, alors $x \in U$. Donc dans tous les cas, $\alpha^{-1}(U) \in \{\emptyset, [0,1], [0,1[\}$ qui sont tous des ouverts de $[0,1]$.
Donc α est un chemin continu de x à y dans X.
Le cas $y \leq x$ est similaire. □

Définition 22 (Ordre-connexité)**.** Soit X un espace pré-ordonné fini. X est *ordre-connexe* si pour tous x et y $\in X$, il existe une suite $x = x_0, \dots, x_n = y$ d'éléments de X tels que deux points consécutifs sont comparables.

Remarque. Un espace pré-ordonné fini est ordre-connexe si et seulement si son diagramme de Hasse est connexe, dans le sens où pour toute paire de points, il existe une suite d'arêtes les reliant.

Exemple. On a



X est ordre-connexe mais Y ne l'est pas

Théorème 23 ()**.** *Soit X un A-espace. Il y a équivalence entre :*

(i) *X est un espace topologique connexe ;*

(ii) *X est un espace ordre-connexe ;*

(iii) *X est un espace topologique connexe par arcs.*

Démonstration. **(ii) ⇒ (iii)** Supposons que X soit ordre-connexe.
Soient x et y dans X. Alors il existe une suite reliant x à y telle que deux points consécutifs soient comparables.
La proposition précédente assure, par la concaténation des chemins entre chaque élément de la suite, qu'il existe un chemin continu de x à y.
Ainsi X est connexe par arcs.

(iii) ⇒ (i) ok

(i) ⇒ (ii) Supposons que X soit connexe.
Soient $x \in X$ et $A = \{y \in X;\ \exists\, x = x_0, \dots, x_n = y \in X,\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_{i-1} \textit{ et } x_i \textit{ sont comparables}\}$.
Si $y \in A$, et $z \leq y$, alors $z \in A$. Ainsi A est un down-set.
De même on montre que A est un up-set.
Ainsi A est ouvert et fermé, et est non vide car contient x,
donc $A = X$, d'où X est ordre-connexe.
□

Définition 24 (Ordre de fonctions)**.** Soient X et Y deux espaces pré-ordonnés. On munit l'ensemble Y^X des applications continues $X \longrightarrow Y$ de l'ordre point-par-point $f \leq g$ si $\forall\, x \in X,\ f(x) \leq g(x)$.

Théorème 25. *Si X et Y sont finis, alors l'ordre point-par-point sur Y^X correspond exactement à la topologie compacte-ouverte.*

Démonstration. · Si $g \leq f$ et $f \in S(K,W)$, alors $\forall\, x \in K,\ g(x) \leq f(x) \in W$. Comme W est un ouvert, on a $g(x) \in W$ donc $g \in S(K,W)$.
Ainsi, $S(K,W)$ est un ouvert pour l'ordre point-par-point.

· Si $f \in S(K,W)$, alors $\{g \in Y^X;\ g \leq f\} = \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{f(x)})$ est un ouvert de la topologie compacte-ouverte par intersection finie. Mais $\{g \in Y^X;\ g \leq f\} = U_f$ pour la topologie de l'ordre point-par-point.
Ainsi U_f est un ouvert de la topologie compacte-ouverte.

□

A partir de maintenant, on considérera toujours la topologie compacte-ouverte sur Y^X, sauf contre-indication.

Définition 26 (Equivalence de fonctions)**.** Soient X et Y deux A-espaces et f et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications. On écrira $f \simeq g$ si f et g sont homotopes (i.e. il existe une application continue $H : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ telle que $H(0,\cdot) = f$ et $H(1,\cdot) = g$).
Si elles sont homotopes relativement à $A \subset X$ (i.e. il existe une homotopie H de f vers g, telle que $\forall\, (a,t) \in A \times [0,1],\ H(a,t) = f(a) = g(a)$), on écrira $f \simeq g\ rel\ A$.

Proposition 27. *Soient X et Y deux A-espaces, $A \subset X$ et f et $g : X \longrightarrow Y$. Alors*

$$f \simeq g \iff \textit{il existe une suite } f = f_0, \dots, f_n = g \textit{ point} - \textit{par} - \textit{point comparable.}$$

et

$$f \simeq g\ rel\ A \iff \textit{il existe une suite } f = f_0, \dots, f_n = g \textit{ point} - \textit{par} - \textit{point comparable telle que } \forall\, i \in [\![0,n]\!],\ f_{i|A} = f_{|A}.$$

Démonstration. On a $f \simeq g\ rel\ A$ si et seulement s'il existe un chemin $\alpha : I \longrightarrow Y^X$ de f à g tel que

$$\forall\, t \in I,\ \alpha(t)_{|A} = f_{|A}$$

Cela revient à dire qu'il existe un chemin $\alpha : I \longrightarrow M$ de f à g, où $M = \{f \in Y^X;\ h_{|A} = f_{|A}\}$.
On a vu que cela équivalent à l'existence d'une suite $f = f_0, \dots, f_n = g \in M$ telle que deux éléments consécutifs sont comparables. L'ordre sur M est celui induit par celui de Y^X, c'est donc l'ordre point-par-point.
La première équivalence se déduit de cela via $A = \emptyset$. □

Définition 28 (Équivalence d'homotopie)**.** $f : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* si il existe $g : Y \longrightarrow X$ telle que :

— $f \circ g$ est homotope à $\mathbf{id}_Y$;

— $g \circ f$ est homotope à $\mathbf{id}_X$.

Proposition 29. *Soient X et Y deux A-espaces, et $f,\ g : X \longrightarrow Y$. On a :*

$$f \simeq g \iff f^{op} \simeq g^{op}.$$

En particulier,

$$f \textit{ est une équivalence d'homotopie} \iff f^{op} \textit{ l'est}$$
$$\textit{2 espaces finis sont homotopes} \iff \textit{leurs duals le sont.}$$

Démonstration. L'ordre sur $(Y^{op})^{X^{op}}$ est exactement l'ordre sur $(Y^X)^{op}$, d'où la proposition. □

Remarque. Tout ensemble partiellement ordonné admettant un maximum ou un minimum est contractile. (En effet, l'identité est comparable à l'application constante égale au minimum ou maximum.)

Si Y est T_0-séparé, alors Y^X est T_0-séparé.
(En effet, $(f \leq g\ ,\ g \leq f) \Rightarrow \forall\, x \in X,\ f(x) = g(x)$.)

4 Types d'homotopie

Définition 30 (Équivalence faible d'homotopie)**.** $f\ :\ X \longrightarrow Y$ est une *équivalence faible d'homotopie* si f induit un isomorphisme dans tout groupe d'homotopie,
ie $f_*\ :\ \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est une bijection
et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in X,$ $f_* : \begin{array}{ccc} \pi_n(X,\ x) & \longrightarrow & \pi_n(Y,\ f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$ est un isomorphisme.

Proposition 31. *Toute équivalence d'homotopie entre A-espaces est une équivalence faible d'homotopie.*

Démonstration. Soit $f\ :\ X \longrightarrow Y$ une équivalence d'homotopie. Soit g l'inverse à homotopie près de f. Alors il existe $F_1\ :\ X \times [0,1] \longrightarrow X$ et $F_2\ :\ Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ continues telles que :

— $F_1(\cdot, 0) = \mathbf{id}_X$ et $F_2(\cdot, 0) = \mathbf{id}_Y$

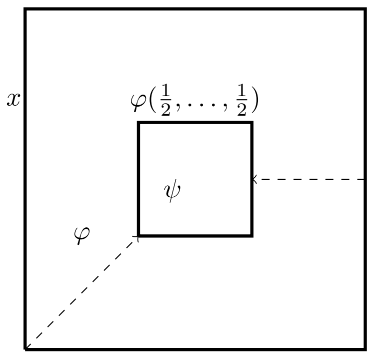
— $F_1(\cdot, 1) = g \circ f$ et $F_2(\cdot, 1) = f \circ g$.

· Cas n = 0 : Tout d'abord, f_* est bien définie car si $\gamma\ :\ [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin continu de x à y dans X, alors $f \circ \gamma\ :\ [0,1] \longrightarrow Y$ est un chemin continu de $f(x)$ à $f(y)$ dans Y.
Ainsi, si x et y sont dans la même composante connexe, alors $f(x)$ et $f(y)$ aussi.
Puis, pour tout $y \in Y$, il existe $x = g(y) \in X$ tel que $F_2(y, \cdot)\ :\ [0,1] \longrightarrow Y$ est un chemin continu de y à $f(x)$ dans Y. Ceci donne la surjectivité de f_* car pour des A-espaces, il y a équivalence entre connexité et connexité par arcs (23).
Puis si $x,\ y \in X$ sont tels qu'il existe un chemin continu γ de $f(x)$ à $f(y)$ dans Y, i.e. $f_*([x]) = g_*([y])$, alors [2] $F_1(x, \cdot) + (g \circ \gamma) - F_1(y, \cdot)$ est un chemin continu de x à y dans X, donc $[x] = [y]$. Ceci donne l'injectivité de f_*.

· Cas $n \in \mathbb{N}^*$: On définit $f_* : \begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \longrightarrow & \pi_n(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$.
Montrons que f_* est bijective.
Soit $s \in [0,1]$.
Soit $\alpha : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \frac{1+2s}{2s} t \mathbf{1}_{[0, \frac{s}{1+2s}]}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[\frac{s}{1+2s}, \frac{1+s}{1+2s}]}(t) + (\frac{1+2s}{2s} t - \frac{1}{2s}) \mathbf{1}_{[\frac{1+s}{1+2s}, 1]}(t) \end{array}$.
Pour tout $\phi\ :\ (I_N, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$ et $\psi\ :\ (I_N, \partial I_n) \longrightarrow (X, \phi(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}))$,
on définit $\phi \diamond_s \psi\ :\ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$ par :

$$\phi \diamond_s \psi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \phi(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) & \textit{si } (x_1, \ldots, x_n) \in I_n \setminus [\frac{s}{1+2s}, \frac{1+s}{1+2s}]^n \\ \psi((1+2s)x_1 - s, \ldots, (1+2s)x_n - s) & \textit{si } (x_1, \ldots, x_n) \in [\frac{s}{1+2s}, \frac{1+s}{1+2s}]^n \end{cases}$$

qui est continue si ϕ et ψ le sont. Voici comment on peut représenter $\diamond_{\frac{1}{2}}$:



2. où + dénote la concaténation (87)

Soit $\gamma \ : \ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$
Posons $H : \begin{array}{ccc} I_n \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (y,t) & \longmapsto & F_1(\gamma(y), t) \end{array}$ de sorte que $H(\cdot, 0) = \gamma$ et $H(\cdot, 1) = g \circ f \circ \gamma$.

Pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, soit $h_t \ : \ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$ continue telle que $\{h_t(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\} = H(\partial I_n, 2t-1)$ et $t \mapsto h_t(y)$ continue pour tout $y \in I_n$.

Soit alors $G : \begin{array}{ccc} I_n \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (y,t) & \longmapsto & \begin{cases} h_{\frac{1}{2}} \diamond_{2t} \gamma(y) & si\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_t \diamond_1 H(y, 2t-1) & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$.

C'est une application continue telle que :
$\forall\, t \in [0,1],\ G(\partial I_n, t) = \{x\}$
$G(\cdot, 0) = \gamma$
$G(\cdot, 1) = h_1 \diamond_1 (g \circ f \circ \gamma)$. On a ainsi $\beta_{h_1} = g_* \circ f_* : \begin{array}{ccc} \pi_n(X,x) & \longrightarrow & \pi_n(X, g \circ f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [g \circ f \circ \gamma] \end{array}$
où $\beta_{h_1} : \begin{array}{ccc} \pi_n(X,x) & \longrightarrow & \pi_n(X, h_1(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})) \\ [\gamma] & \longmapsto & [h_1 \diamond_1 \gamma] \end{array}$.
Or, pour tout $h \in \pi_n(X,x)$, β_h est bijective :
avec $\overline{h} : \begin{array}{ccc} (I_n, \partial I_n) & \longrightarrow & (X, h(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & h(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) \end{array}$,
où $\mu : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2} - t + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t) \end{array}$.
$\beta_h \circ \beta_{\overline{h}}([\gamma]) = [h \diamond_1 \overline{h} \diamond_1 \gamma] = [\gamma]$
car $[h \diamond_1 \overline{h}] = [x]$ où x désigne la fonction constante égale à x.
et $\beta_{\overline{h}} \circ \beta_h([\eta]) = [\overline{h} \diamond_1 h \diamond_1 \gamma] = \eta$.
Donc β_h est une bijection d'inverse $\beta_{\overline{h}}$.

Ainsi, $g_* \circ f_*$ est bijective, donc g_* est surjective.
Par le même raisonnement pour $f_{*|\pi_n(X, g \circ f(x))} \circ g_* \ : \ \pi_n(X, f(x)) \longrightarrow \pi_n(X, f \circ g \circ f(x))$, on obtient l'injectivité de g_*.
Puis, comme $f_* = g_*^{-1} \circ g_* \circ f_*$, on en déduit que f_* est bijective.
On en conclue que f_* est un isomorphisme, et donc que f est une équivalence faible d'homotopie.

□

Remarque. La réciproque est fausse en général, mais le théorème de Whitehead assure que toute équivalence faible d'homotopie entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie.

Proposition 32. *Les équivalences faibles d'homotopie satisfont la "propriété du deux sur trois" : si f et g sont composables et que deux des trois applications f, g, et $g \circ f$ sont des équivalences faibles d'homotopie, alors la troisième aussi.*

Démonstration. Ceci est dû au fait que la composition de morphismes reste un morphisme, la composition de bijections reste une bijection, et que l'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. □

Proposition 33. *Si f et $g : X \longrightarrow Y$ sont homotopes et que f est une équivalences faibles d'homotopie, alors g aussi.*

Démonstration. · Pour tout $[y] \in \pi_0(Y)$, il existe un unique $[x] \in \pi_0(X)$ tel que $[f(x)] = [y]$.
Mais $[f(x)] = [g(x)]$ car f et g sont homotopes, donc il existe un chemin continu de $f(x)$ à $g(x)$, donc $g_* \ : \ \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est bijective.

· On appelle $F \ : \ X \times [0,1] \longrightarrow Y$ l'homotopie de f à g.
Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, et $h : \begin{array}{ccc} (I_n, \partial I_n) & \longrightarrow & (Y, f(x)) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & F(x, 1 - \|(x_1 - \frac{1}{2}, \dots, x_n - \frac{1}{2})\|) \end{array}$ de sorte que $h(\partial I_n) = \{f(x)\}$ et $h(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) = g(x)$.
Pour tout $[\eta] \in \pi_n(Y, g(x))$, on a $[h \diamond_1 \eta] \in \pi_n(Y, f(x))$, donc il existe un unique $[\gamma] \in \pi_n(X, x)$ tel que $[f \circ \gamma] = [h \diamond_1 \eta]$.
Mais $[\overline{h} \diamond_1 (f \circ \gamma)] = [g \circ \gamma]$, donc $g_* \ : \ \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y, g(x))$ est bijective.
Ainsi, g est un bien une équivalence faible d'homotopie. □

Remarque. On pourrait voir qu'équivalence faible d'homotopie $f : X \longrightarrow Y$ induit un isomorphisme $f_* : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(Y;G)$ entre groupes d'homologie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G groupe coefficient.

5 Les théorèmes de McCord

5.1 Préliminaire

Remarque. Dans cette partie, pour un complexe simplicial combinatoire $\mathcal{K}$, on notera $|\mathcal{K}|$ sa réalisation géométrique munie de la topologie faible (94).
Toutes les applications seront continues.

Définition 34 (Basis like open cover)**.** Soient X un A-espace et $\mathcal{U}$ un recouvrement d'ouverts de X. $\mathcal{U}$ est appelé *basis like open cover* si $\mathcal{U}$ est la base d'une topologie de X i.e.

$$\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{U},\ \forall\, x \in U_1 \cap U_2,\ \exists\, U_3 \in \mathcal{U},\ x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2.$$

Remarque. Par exemple, pour X un A-espace, la base minimale $\{U_x;\ x \in X\}$ est une basis like open cover.
En effet, si $x,\ y,\ z \in X$ avec $z \leq x$ et $z \leq y$, i.e. $z \in U_x \cap U_y$, alors $z \in U_z \subset U_x \cap U_y$.

Théorème 35 (Théroème de McCord I)**.** *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.*
Si il existe $\mathcal{U}$ une basis like open cover de Y telle que toute restriction, pour $U \in \mathcal{U}$, $f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ est une équivalence faible d'homotopie,
alors $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence faible d'homotopie.

Remarque. Ce théorème est admis.

5.2 Construction d'un complexe simplicial à partir d'un T_0-A-espace

Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 36 (Théorème de McCord II)**.**
- *Il existe une correspondance qui associe à chaque T_0-A-espace X un complexe simplicial $\mathcal{K}(X)$, et une équivalence faible d'homotopie $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$;*
- *De plus, toute application $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre T_0-A-espaces induit une application simpliciale $\mathcal{K}(\varphi) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$, telle que $\varphi \circ \mu_X = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(\varphi)|$.*

Définition 37 (Complexe simplicial associé)**.** Soit X un T_0-A-espaces. Son *complexe simplicial associé* $\mathcal{K}(X)$ est le complexe simplicial dont les sommets sont les points de X, et les simplexes sont les parties finis totalement ordonnées de X.

Lemme 38. *Soit X un T_0-A-espaces. Pour tout $Y \subset X$, $\mathcal{K}(Y)$ est un sous-complexe total de $\mathcal{K}(X)$.*

Démonstration. Soit $y \in Y$. Alors $U_y^Y = Y \cap U_y^X$ car un ouvert de Y est l'intersection d'un ouvert de X avec Y.
Ainsi, $\leq_Y$ est la restriction de $\leq_X$ à Y.
Puis, $\mathcal{K}(Y)$ est un sous-complexe de $\mathcal{K}(X)$.
Enfin, soit σ un simplexe de $\mathcal{K}(X)$ ayant tous ses sommets dans $\mathcal{K}(Y)$. Alors par ce qui précède, σ forme une partie totalement ordonnée pour $\leq_X$ de Y, donc une partie totalement ordonnée pour $\leq_Y$: c'est donc un simplexe de $\mathcal{K}(Y)$.
$\mathcal{K}(Y)$ est donc bien un sous-complexe total de $\mathcal{K}(X)$. □

Définition 39 ($\mathcal{K}$-McCord application)**.** Soit X un T_0-A-espace. On définit la *$\mathcal{K}$-McCord application* par $\begin{array}{rccc} \mu_X : & |\mathcal{K}(X)| & \longrightarrow & X \\ & a & \longmapsto & \min(\text{support}(a)) \end{array}$.

Définition 40 (Ensemble star)**.** Soient X un T_0-A-espace et $y \in X$. star(y) est l'union de tous les simplexes de $|\mathcal{K}(X)|$ admettant y comme sommet.

Lemme 41. *Soient X un T_0-A-espace et $Y \subset X$ ouvert. Alors* $\mu_X^{-1}(Y) = \bigcup\limits_{y \in Y} \mathrm{star}(y)$.

Démonstration. Soit $u \in \mu_X^{-1}(Y)$. Alors il existe $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{K}(X)$ avec $x_0 < \ldots < x_n$ tel que $\mu_X(u) = x_0 \in Y$.
Ainsi, $\sigma \subset \mathrm{star}(x_0)$, et donc $u \in \bigcup\limits_{y \in Y} \mathrm{star}(y)$.

Réciproquement, soit $u \in \mathrm{star}(y)$ pour un certain $y \in Y$.
Alors $\mu_X(u) \leq y$ par définition de μ_X et star, donc $\mu_X(u) \in Y$ car Y est ouvert et $y \in Y$. □

Lemme 42. *Soient X un A-espace et $x \in X$. Alors U_x est contractile.*

Démonstration. U_x admet un maximum x, donc U_x est contractile. □

Lemme 43. *Si X est un T_0-A-espace et $x \in X$, alors $\mu_X^{-1}(U_x)$ est un ouvert contractile de $|\mathcal{K}(X)|$.*

Démonstration. Soit $L = \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subset \mathcal{K}(X)$. L est un sous-complexe total de $\mathcal{K}(X)$ (potentiellement vide) porté par les sommets n'étant pas dans U_x par le Lemme 38.
Montrons que ${\mu_X}^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$:

— Soit $a \in {\mu_X}^{-1}(U_x)$. Alors $\min(\mathrm{support}(a)) \in U_x$ par définition de μ_X.
En particulier, il existe $b \in U_x \cap \mathrm{support}(a)$, donc $a \notin |L|$.

— Soit $a \notin |L|$. Alors il existe $y \in \mathrm{support}(a)$ tel que $y \in U_x$, donc $\min(\mathrm{support}(a)) \leq y \leq x$ et $\mu_X(a) \in U_x$.

Ainsi, comme $|L| \subset |\mathcal{K}(X)|$ est fermé comme réunion de simplexes (qui sont des fermés), ${\mu_X}^{-1}(U_x)$ est ouvert.
Montrons que $|\mathcal{K}(U_X)|$ est un rétract par déformation de ${\mu_X}^{-1}(U_x)$.
Soit $u \in {\mu_X}^{-1}(U_x) \setminus |\mathcal{K}(U_X)|$.
Alors u s'écrit $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum\limits_{k=n+1}^{m} \beta_k x_k$ avec $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k > 0$, $\forall\, k \in [\![n+1, m]\!]$, $\beta_k > 0$, $x_1 < \ldots < x_m$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum\limits_{k=n+1}^{m} \beta_k = 1$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{K}(U_X)$ et $x_{n+1}, \ldots, x_m \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(U_X)$.

Soit alors $f(u, \cdot) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & {\mu_X}^{-1}(U_x) \\ t & \longmapsto & \left(t + \frac{1-t}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + t \sum\limits_{k=n+1}^{m} \beta_k x_k \end{array}$.

Pour $u \in |\mathcal{K}(U_x)|$, on définit $f(u, \cdot) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mu_X^{-1}(U_x) \\ t & \longmapsto & u \end{array}$.

Ainsi, $f : \mu_X^{-1}(U_x) \times [0,1] \longrightarrow \mu_X^{-1}(U_x)$ est une homotopie de $\mathbf{id}_{\mu_X^{-1}(U_x)}$ à une application à valeurs dans $|\mathcal{K}(U_x)|$ constante sur $|\mathcal{K}(U_x)|$.
$|\mathcal{K}(U_x)|$ est donc bien un rétract fort par déformation de $\mu_X^{-1}(U_x)$.

Puis, montrons que $\mathcal{K}(U_x) = \mathrm{cone}(\mathcal{K}(U_x \setminus \{x\}), x)$ [3] :
Soit $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ un simplexe de $\mathcal{K}(U_x)$ avec $x_0 < \ldots < x_n$.
Alors $x_0 < \ldots < x_n \leq x$, donc $\sigma \cup \{x\}$ est un simplexe de $\mathcal{K}(U_x)$.
De plus, $x \notin \sigma \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{K}(U_x \setminus \{x\})$.
Ainsi, on a bien $\mathcal{K}(U_x) = \mathrm{cone}(\mathcal{K}(U_x \setminus \{x\}), x)$.

Par la proposition 100, $|\mathrm{cone}(\mathcal{K}(U_x \setminus \{x\}), x)|$ est contractile, et donc ${\mu_X}^{-1}(U_x)$ est contractile. □

Théorème 44 (Théorème de McCord II - rappel)**.** — *Pour tout T_0-A-espace X, $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$ est une équivalence faible d'homotopie ;*

— *De plus, toute application $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre T_0-A-espaces induit une application simpliciale $\mathcal{K}(\varphi) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$, telle que $\varphi \circ \mu_X = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(\varphi)|$.*

3. le cône simplicial est défini ici : 99

Démonstration. — Comme U_x et ${\mu_X}^{-1}(U_x)$ sont contractiles, leurs groupes d'homotopie supérieurs respectifs sont triviaux, et donc $f_{X|\mu_X^{-1}(U_x)}$ est une équivalence faible d'homotopie. Ceci étant valable pour tout $x \in X$, avec l'ensemble des U_x formant une basis like open cover, par le Théorème I, μ_X est une équivalence faible d'homotopie.

— Enfin, soit $\varphi \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$ une application entre T_0-A-espaces. Comme φ préserve l'ordre, l'application induite $\mathcal{K}(\varphi) \ : \ \mathcal{K}(X) \ \longrightarrow \ \mathcal{K}(Y)$ est simpliciale (cf proposition 45). Soit $u \in \sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset |\mathcal{K}(X)|$ avec $x_0 < \ldots < x_n$. Alors $|\mathcal{K}(\varphi)|(u) \in \{\mathcal{K}(\varphi)(x_0), \ldots, \mathcal{K}(\varphi)(x_n)\}$, avec $\mathcal{K}(\varphi)(x_0) \leq \ldots \leq \mathcal{K}(\varphi)(x_n)$. Ainsi $\mu_Y(|\mathcal{K}(\varphi)|(u)) = \varphi(x_0) = \varphi(\mu_X(u))$.

□

Proposition 45. *Si $f \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$ est une application continue entre T_0-A-espaces, alors l'application simpliciale associée $\mathcal{K}(f) \ : \ \mathcal{K}(X) \ \longrightarrow \ \mathcal{K}(Y)$ est une application simpliciale.*

Démonstration. Comme f est continue, elle préserve l'ordre. Ainsi, l'image de chaque chaîne de X est une chaîne de Y, donc l'image de chaque face de $\mathcal{K}(X)$ est une face de $\mathcal{K}(Y)$. □

Proposition 46. *Si X est un T_0-A-espace, alors $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$.*
Si $f \ : \ X \ \longrightarrow \ Y$ est une application continue entre T_0-A-espaces, alors $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}(f^{op})$.

Proposition 47. *$\mathcal{K}$ est un foncteur covariant.*

5.3 Construction d'un T_0-A-espace à partir d'un complexe simplicial

On pose K un complexe simplicial et K' sa première subdivision barycentrique. Le but de cette sous-section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 48 (Théorème de McCord III). — *Il existe une correspondance qui associe à chaque complexe simplicial K un T_0-espace localement fini $\mathcal{X}(K)$ et une équivalence faible d'homotopie $\mu_K \ : \ |K| \ \longrightarrow \ \mathcal{X}(K)$;*

— *De plus, toute application simpliciale $\psi \ : \ K \ \longrightarrow \ L$ est associée à une application $\mathcal{X}(\psi) \ : \ \mathcal{X}(K) \ \longrightarrow \ \mathcal{X}(L)$ telle que $\mathcal{X}(\psi) \circ \mu_K = \mu_L \circ |\psi|$.*

Définition 49 ($\mathcal{X}(K)$)**.** Pour tout simplexe σ de K, soit $b(\sigma) \in K'$ son barycentre. Soit alors $\mathcal{X}(K) = \{b(\sigma); \sigma \in K\}$ l'ensemble des sommets de K'.
$\mathcal{X}(K)$ possède une relation d'ordre canonique définie par $b(\sigma) \leq b(\sigma')$ si $\sigma \subset \sigma'$.
$\mathcal{X}(K)$ est donc muni d'une structure de T_0-A-espace.

Proposition 50. *On observe que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$.*

Définition 51 ($\mathcal{X}$-McCord application)**.** On définit la *$\mathcal{X}$-McCord application* $\mu_K \ : \ |K| \ \longrightarrow \ \mathcal{X}(K)$ l'application égale à $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ du Théorème II (39).

Remarque. Elle est bien définie car $|\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| = |K'| = |K|$ (cf 98).

Théorème 52 (Théorème de McCord III - rappel). — *Pour tout complexe simplicial K, $\mu_K \ : \ |K| \ \longrightarrow \ \mathcal{X}(K)$ une équivalence faible d'homotopie ;*

— *De plus, toute application simpliciale $\psi \ : \ K \ \longrightarrow \ L$ est associée à une application $\mathcal{X}(\psi) \ : \ \mathcal{X}(K) \ \longrightarrow \ \mathcal{X}(L)$ telle que $\mathcal{X}(\psi) \circ \mu_K = \mu_L \circ |\psi|$.*

Démonstration. $\mu_K = \mu_{\mathcal{X}(K)}$ qui est une équivalence faible d'homotopie par le Théorème de McCord II.
Puis, posons $\psi' : \begin{array}{ccc} K' & \longrightarrow & L' \\ b(\sigma) & \longmapsto & b(\psi(\sigma)) \end{array}$ qui est une application simpliciale (où L' est la première subdivision

barycentrique de L).
Les applications $|\psi|$ et $|\psi'| : |K| \longrightarrow |L|$ sont égales.
Puis $\psi'(\mathcal{X}(K)) \subset \mathcal{X}(L)$ donc ψ' induit une application $\mathcal{X}(\psi) : \mathcal{X}(K) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$ qui préserve l'ordre (car ψ' est simpliciale) donc est continue.
Par la relation de commutativité du Théorème de McCord II, $\mathcal{X}(\psi) \circ \mu_K = \mu_L \circ |\mathcal{K}(\mathcal{X}(\psi))|$.
Mais on a $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\psi)) = \psi'$, donc $|\psi| = |\psi'| = |\mathcal{K}(\mathcal{X}(\psi))|$, d'où $\mathcal{X}(\psi) \circ \mu_K = \mu_L \circ |\psi|$. □

Proposition 53. *$\mathcal{X}$ est un foncteur covariant.*

5.4 Lien entre A-espace et T_0-A-espace

Proposition 54. *Soient X un A-espace et X_0 un quotient de X tel que pour tout $y \in [x] \in X_0,\ y \leq x$. Alors l'application quotient $q : X \longrightarrow X_0$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Soit $i : X_0 \longrightarrow X$ telle que $q \circ i = \mathbf{id}_{X_0}$ (on prend pour tout $[x] \in X_0,\ i([x]) \in [x]$).
On va montrer que la composition $i \circ q$ préserve l'ordre : soient $x \leq y \in X$.
Alors on a $i \circ q(x) \in [x]$ donc par hypothèse $i \circ q(x) \leq x$ et de même on a $y \leq i \circ q(y)$, d'où par hypothèse sur x et y, $i \circ q(x) \leq i \circ q(y)$.
Ainsi $i \circ q$ est continue, donc i est continue par définition de la topologie quotient.
Mais par hypothèse sur X_0, $i \circ q \leq \mathbf{id}_{X_0}$, donc $i \circ q \simeq \mathbf{id}_{X_0}$, donc q est une équivalence d'homotopie et i est une équivalence d'homotopie inverse de q. □

Théorème 55 (Théorème de McCord IV)**.** *Il existe une correspondance qui à tout A-espace X associe un quotient $\hat{X}$ de X tel que :*

1. *l'application quotient $v_X : X \longrightarrow \hat{X}$ est une équivalence d'homotopie ;*
2. *$\hat{X}$ est un T_0-A-espace ;*
3. *pour toute application $f : X \longrightarrow Y$ avec Y un A-espace, il existe une unique application $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ telle que $v_Y \circ f = \hat{f} \circ v_X$.*

Démonstration.
— Soient X un A-espace et $\sim$ la relation $x \sim y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$, et $\hat{X} = X_{/\sim}$. Alors $\hat{X}$ est un T_0-A-espace et l'application quotient $v_X : X \longrightarrow X_0$ est une équivalence d'homotopie par la proposition précédente (54).
— Comme f préserve l'ordre, f envoie des points équivalents de X pour $\sim$ sur des points équivalents de Y. Il existe donc une unique fonction $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ telle que $\hat{f} \circ v_X = v_Y \circ f$. Comme v_X est une application quotient et que f et v_Y donc $v_Y \circ f$ sont continues, $\hat{f}$ est continue.

□

Proposition 56. *Si X est un A-espace, et $\mu : \hat{X} \longrightarrow X$ est l'inverse à homotopie près de v_X, alors $\mu \circ f_{\hat{X}} : |\mathcal{K}(\hat{X})| \longrightarrow X$ est une équivalence faible d'homotopie par les Théorèmes II et IV. De plus, si X est fini, alors $\mathcal{K}(\hat{X})$ aussi.*

Donc le Théorème de McCord 0 découle des Théorèmes II, III et IV.

6 Pour aller plus loin

6.1 Espaces minimaux et cœur

Définition 57 (Down-beat et up-beat point)**.** Soit X un T_0-A-espace.
Alors $x \in X$ est un *down-beat point* si x couvre un et un seul élément de X, dans le sens où

$$\exists\, x_0 \in X,\ \forall\, y \in X,\ y < x \Rightarrow y \leq x_0.$$

De même x est un *up-beat point* si est inférieur à un et un seul élément de X.
Si l'on est dans un des deux cas, on dit que x est un *beat point*.

Remarque. Soient X un espace fini T_0-séparé et $x \in X$.

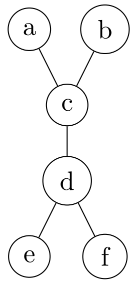
$$x\ down - beat\ point \iff U_x \setminus \{x\}\ admet\ un\ maximum.$$

$$x\ up - beat\ point \iff U_x \setminus \{x\}\ admet\ un\ minimum.$$

$$x\ down - beat\ point\ de\ X \iff x\ up - beat\ point\ de\ X^{op}.$$

Remarque. Il est facile de reconnaitre des beat points dans le diagramme de Hasse :
x est un down-beat point si et seulement s'il existe un unique point en-dessous de lui,
et c'est un up-beat point si et seulement s'il existe un unique point au-dessus de lui.

Exemple. Dans le diagramme de Hasse ci-contre, a, b, c sont des down-beat points mais pas des up-beat points, et d, e et f sont des up-beat points mais pas des down-beat points.



Proposition 58. *Si $x \in X$ est un beat point, alors $X \setminus \{x\}$ est un rétract fort par déformation de X.*
i.e. il existe une application $F : X \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que
$\forall\, y \in X,\ F(y,1) \neq x$,
et $\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, y \neq x,\ F(y,t) = y$,
ou encore il existe $f : X \longrightarrow X$ telle que $f \simeq \mathbf{id}_X\ rel\ X \setminus \{x\}$.

Démonstration. Supposons que x soit un down-beat point, et soit y le maximum de $U_x \setminus \{x\}$.
Soit $r : X \longrightarrow X \setminus \{x\}$ telle que $r(x) = y$ et $\forall\, z \neq x,\ r(z) = z$.
Soit $i : X \setminus \{x\} \longrightarrow X$ l'inclusion canonique. Alors la composée $i \circ r$ préserve l'ordre, et on a $i \circ r \leq \mathbf{id}_X$, donc par la proposition 27, $i \circ r \simeq \mathbf{id}_X\ rel\ X \setminus \{x\}$.
Ainsi $f = i \circ r$ convient. ☐

Définition 59 (Espace minimal et cœur)**.** Un T_0-A-espace est un *espace minimal* s'il ne contient aucun beat point.
Un *cœur* d'un A-espace X est un rétract fort par déformation de X qui est aussi un espace minimal.

Proposition 60. *Tout A-espace a un cœur.*

Démonstration. Soit X un A-espace. Alors on peut trouver un rétract fort par déformation $\hat{X}$ qui est un T_0-A-espace (Théorème IV), puis on enlève les beat points un par un par la proposition précédente, jusqu'à obtenir un espace minimal. ☐

Théorème 61. *Soit X un espace fini minimal. Alors*
Une application $f : X \longrightarrow X$ est homotope à l'identité si et seulement si $f = \mathbf{id}_X$.

Démonstration. Tout d'abord, l'identité est bien homotope à elle-même.

Supposons maintenant que f soit homotope à l'identité.
(Si f est homotope à l'identité, il existe une suite de fonction de l'identité à f dont deux termes consécutifs sont

comparables.
Par récurrence sur le nombre d'éléments de la suite, il suffit de démontrer le théorème pour la première occurrence.)
On peut donc supposer que $f \leq \mathbf{id}_X$ (le cas $f \geq \mathbf{id}_X$ est similaire).
On va montrer par récurrence forte sur le nombre d'éléments de A que pour tout ouvert $A \subset X$, $f_{|A} = \mathbf{id}_A$.
Pour $|A| = 1$: Soit x l'élément de A. Comme A est ouvert, x est un élément minimal de X. Alors comme $f(x) \leq x$ par hypothèse, et que x est minimal, $f(x) = x$.
Puis, supposons que pour tout ouvert A de X de cardinal inférieur à $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{|A} = \mathbf{id}_A$. Soient maintenant A un ouvert de X de cardinal $n+1$, et $x \in A$. On a $A = \bigcup\limits_{y \in A} U_y$. Par hypothèse de récurrence, $f_{|U_x \setminus \{x\}} = \mathbf{id}_{U_x \setminus \{x\}}$.
Si $f(x) \neq x$, alors par hypothèse $f(x) \in U_x \setminus \{x\}$, d'où pour tout $y < x$, $y = f(y) \leq f(x)$ car f est continue (car homotope à $\mathbf{id}$) donc préserve l'ordre.
Ainsi, $f(x)$ est le maximum de $U_x \setminus \{x\}$, ce qui contredit le fait que X n'aie pas de down-beat point (X est minimal).
On en conclue que $f(x) = x$, donc $f_{|A} = \mathbf{id}_A$. $\square$

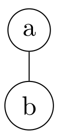
Remarque. Ce n'est pas vrai pour tout A-espace : par exemple sur $\mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par l'ordre canonique, $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & x-1 \end{array}$ est homotope à $\mathbf{id}$ mais n'y est pas égale.

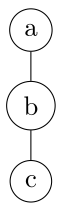
Théorème 62 (Théorème de classification)**.** *Une équivalence d'homotopies entre espace finis minimaux est un homéomorphisme.*
En particulier, un cœur d'un espace fini est unique à homéomorphisme près, et deux espaces finis ont même type d'homotopie si et seulement si leurs cœurs sont homéomorphes.

Démonstration. Soient X et Y deux espaces finis minimaux, $f : X \longrightarrow Y$ un équivalence d'homotopie et g son inverse à homotopie près.
Alors par le théorème 61, $f \circ g = \mathbf{id}_Y$ et $g \circ f = \mathbf{id}_X$.
Ainsi, f est un homéomorphisme.
Puis, soient X_0 et X_1 deux cœurs d'un espace fini X. Par définition, ils sont homotopes et sont des espaces finis minimaux, donc par le point précédent, ils sont homéomorphes.
Enfin, deux espaces finis sont homotopes si et seulement si leurs cœurs sont homotopes (car un espace fini est homotope à son cœur par définition), et c'est le cas si et seulement si ces cœurs sont homéomorphes. $\square$

Remarque. On notera dans la suite X_C le cœur de X à isomorphisme près.

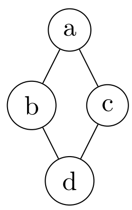
Exemple. Si

$X =$ 

$Y =$ 

alors $Y_C = \{a\} = X_C$.

Ainsi X et Y ont même type d'homotopie, mais pas Z défini par :

$Z =$ 

Corollaire 63. *Le cœur X_C d'un espace topologique fini X est le plus petit (au sens du cardinal) espace ayant le type d'homotopie de X.*

Démonstration. Si Y est un autre espace du type d'homotopie de X, alors son cœur Y_C est homéomorphe à X_C. Ils ont le même nombre de points.
Mais par rétraction, Y a au moins $\#Y_C = \#X_C$ nombre de points. $\square$

Théorème 64 (Caractérisation des espaces finis minimaux)**.** *Soit X un T_0-espace fini. Alors X est minimal $\iff \forall\, x, y \in X$, si ($z$ comparable à $x \Rightarrow z$ comparable à y), alors $x = y$.*

Démonstration. · Supposons que X ne soit pas minimal. Soit alors $x \in X$ un beat point.
On peut supposer que x est un down-beat point.
Soit y le maximum de $U_x \setminus \{x\}$.
Soit $z \in X$ comparable à x.
Si $x \leq z$, alors par définition de U_x et transitivité, $y \leq z$.
Si $x > z$, alors par définition de U_x, $y \geq z$.
Donc z est comparable à y, mais $x \neq y$.

· Réciproquement, supposons qu'il existe $x \neq y \in X$ tels que tout $z \in X$ comparable à x est comparable à y.
En particulier, x est comparable à x, donc x est comparable à y. On peut supposer $x > y$.
Soit $A = \{z \in X,\ z > y \text{ et } \forall\, w \in X \text{ comparable à } z,\ w \text{ est comparable à } y\}$.
Tout d'abord, $A \neq \emptyset$ car $x \in A$.
Ensuite, soit x' un élément minimal de A. On va montrer que x' est un down-beat point avec y comme maximum de $U_x \setminus \{x\}$.
Soit $z < x'$. Alors z est comparable à y car $x' \in A$.
Supposons que $z > y$. Soit alors $w \in X$.
Si $w \leq z$, alors $w \leq x'$, donc w est comparable à y.
Si $w \geq z$, alors $w \geq y$, donc w est comparable à y.
Ainsi, $z \in A$, or ceci contredit la minimalité de x'.
Donc $z \leq y$. Ainsi, y est bien le maximum de $U_x \setminus \{x\}$, donc x' est un down-beat point, et X n'est pas minimal. □

6.2 Non-Hausdorff suspension

Le but de cette sous-section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 65 (Théorème de McCord V)**.** *Il existe un foncteur covariant $\mathcal{S} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et une transformation naturelle $g : S \longrightarrow \mathcal{S}$ tels que :*

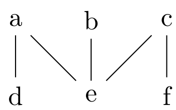
- *la classe des espaces finis (resp. localement finis, A-espaces, T_0-A-espaces) est envoyée sur elle-même par $\mathcal{S}$;*
- *Pour tout espace X, l'application $g_X : S(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ est une équivalence faible d'homotopie.*

Définition 66 (Non-Hausdorff cône)**.** Soit X un espace topologique. Le *non-Hausdorff cône* $\mathcal{C}(X)$ est défini par $X \cup \{w_X\}$ avec w_X un point qui n'est pas dans X.
On défini les ouverts de $\mathcal{C}(X)$ par tous les ouverts de X ainsi que $\mathcal{C}(X)$ tout entier.

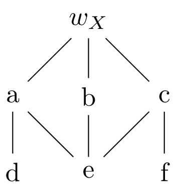
Définition 67 (Non-Hausdorff suspension)**.** Soit X un espace topologique. La *non-Hausdorff suspension* de X est $\mathcal{S}(X) = X \cup \{w_X, w'_X\}$ où w_X et w'_X sont deux points distincts qui ne sont pas dans X.
Sa topologie est définie par les ouverts de X, $X \cup \{w_X\}$, $X \cup \{w'_X\}$ et $\mathcal{S}(X)$.

Remarque. $\mathcal{S}(X)$ est l'union de deux copies de $\mathcal{C}(X)$ dont l'intersection est X.

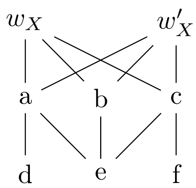
Exemple. Si

$X =$ 

alors

$\mathcal{C}(X) =$ 

et

$\mathcal{S}(X) =$ 

Définition 68 (). Soit $f : X \longrightarrow Y$. On étend f aux non-Hausdorff cône et suspension par $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ telle que $\mathcal{C}(f)(w_X) = w_Y$ et $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(Y)$ telle que $\mathcal{S}(f)(w_X) = w_Y$ et $\mathcal{S}(f)(w'_X) = w'_Y$.

Proposition 69. *Si X et Y sont des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ est continue, alors $\mathcal{C}(f)$ et $\mathcal{S}(f)$ sont continues.*

Démonstration. Soit U un ouvert de $\mathcal{C}(Y)$. Deux cas sont possibles :

- soit $w_Y \notin U$, et dans ce cas $\mathcal{C}(f)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ est un ouvert ;
- ou alors $w_Y \in U$, et $\mathcal{C}(f)^{-1}(U) = f^{-1}(U \setminus \{w_Y\}) \cup \{w_X\}$ qui est un ouvert de $\mathcal{C}(X)$.

Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est continue.
La continuité de $\mathcal{S}(f)$ se prouve de la même manière. □

Proposition 70. *$\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont des foncteurs covariants de **Top** dans elle-même.*

Lemme 71. *Les deux foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ préservent les propriétés suivantes : être un espace fini, localement fini, T_0-séparé ou être un A-espace.*

Démonstration. · pour un espace fini (resp. localement fini), ces foncteurs ne rajoutent qu'un ou deux points, donc les espaces qui en découlent sont fini (resp. localement fini) ;

· pour un A-espace, les foncteurs ne rajoutent que un ou trois ouverts, dont l'intersection avec un autre ouvert reste un ouvert, donc les espaces qui en découlent sont aussi des A-espaces ;

· pour la T_0-séparation, pour tout $x \neq y \in X$, il existe un ouvert contenant l'un mais pas l'autre si X est T_0-séparé, puis X est un ouvert contenant x mais pas w_X, ni w'_X, et enfin $X \cup \{w_X\}$ est un ouvert contenant w_X mais pas w'_X ; et ainsi $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{S}(X)$ vérifient bien l'axiome de T_0-séparation.

□

Lemme 72. *Pour tout A-espace X, $\mathcal{C}(X)$ est contractile.*

Démonstration. Soit $F : [0,1] \times \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ définie pour tout $x \in \mathcal{C}(X)$ et $t \in [0,1[$ par $F(t,x) = x$ et $F(1,x) = w_X$.
Il suffit maintenant de montrer que F est continue. Soit donc $U \subset \mathcal{C}(X)$ un ouvert.

- Si $w_X \in U$, alors par définition de la topologie sur le non-Hausdorff cône $U = \mathcal{C}(X)$, et donc $F^{-1}(U) = [0,1] \times \mathcal{C}(X)$ qui est un ouvert ;
- Sinon, $U \subset X$, donc U est un ouvert de X par définition de la topologie sur le non-Hausdorff cône, et alors $F^{-1}(U) = [0,1[\times U$ qui est un ouvert pour la topologie produit (83).

Ainsi, F est bien une homotopie entre l'identité et l'application constante égale à w_X, d'où la contractibilité de $\mathcal{C}(X)$. □

Nous allons montrer un résultat plus fort que le Théorème V : nous allons construire une transformation naturelle $g^n : S^n \longrightarrow \mathcal{S}^n$, où S^n (respectivement $\mathcal{S}^n$) est l'itérée n-ième de la suspension S (respectivement la non-Hausdorff suspension $\mathcal{S}$), telle que pour tout espace X, $g^n_X : S^n(X) \longrightarrow \mathcal{S}^n(X)$ est une équivalence faible d'homotopie.

Définition 73 (Application induite entre suspensions). Soit $f : X \longrightarrow X'$. On définit l'opérateur T par l'application $T(f) : S(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X')$ par :

- si $X \neq \emptyset$ et $\nu : X \times [-1,1] \longrightarrow S(X)$ est l'application quotient qui envoie $X \times \{1\}$ sur w_X et $X \times \{-1\}$ sur w'_X, pour tout $(x,t) \in X \times]-1,1[$, on prend $T(f)(\nu(x,t)) = f(x)$;
- on prend $T(f)(w_X) = w_{X'}$ et $T(f)(w'_X) = w'_{X'}$.

Proposition 74. *Si $f : X \longrightarrow X'$ est continue, alors $T(f) : S(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X')$ est continue.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow X'$ une application continue. Alors $T(f)$ est continue si et seulement si $h = T(f) \circ \nu$ l'est. Soit U un ouvert de $\mathcal{S}(X')$.

— Si $U = X' \cup \{w_{X'}\}$ (respectivement $X' \cup \{w'_{X'}\}$, $\mathcal{S}(X')$), alors $h^{-1}(U) = X \times]-1,1]$ (respectivement $X \times [-1,1[$, $X \times [-1,1]$) ;

— sinon, $U \subset X'$, et $h^{-1}(U) = U \times]-1,1[$.

Dans tous les cas, $h^{-1}(U)$ est un ouvert de $X \times [-1,1]$, donc h est continue, et donc $T(f)$ est continue. □

Lemme 75. *Soient* $f : X \longrightarrow X'$, $f' : Y \longrightarrow Y'$, $\psi : X \longrightarrow Y$ *et* $\psi' : X' \longrightarrow Y'$.
Si $\psi' \circ f = f' \circ \psi$, *alors on a la relation de commutativité :*

$$\mathcal{S}(\psi') \circ T(f) = T(f') \circ \mathcal{S}(\psi).$$

Démonstration. Supposons que la première relation est vérifiée. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\psi') \circ T(f)(X \times \{1\}) &= \mathcal{S}(\psi')(w_{X'}) \\ &= w_{Y'} \\ &= T(f')(Y \times]-1,1]) \\ &= T(f') \circ \mathcal{S}(\psi)(X \times \{1\})\end{aligned}$$

et on montre de même que $\mathcal{S}(\psi') \circ T(f)(X \times \{-1\}) = T(f') \circ \mathcal{S}(\psi)(X \times \{-1\})$.
Puis dans le cas où $X \neq \emptyset$, soit $(x,t) \in X \times]-1,1[$. On notera aussi (x,t) sa classe d'équivalence dans $S(X)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\psi') \circ T(f)(x,t) &= \mathcal{S}(\psi')(f(x)) \\ &= \psi'(f(x)) \\ &= f'(\psi(x)) \\ &= T(f')(\psi(x),t) \\ &= T(f')(\mathcal{S}(\psi)(x,t)) \\ &= T(f') \circ \mathcal{S}(\psi)(x,t).\end{aligned}$$

On a donc bien la relation attendue pour tout élément de $S(X)$. □

Lemme 76. *Si* $f : X \longrightarrow X'$ *est une équivalence faible d'homotopie, alors* $T(f) : S(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X')$ *aussi.*

Démonstration. On va appliquer le Théorème I. Pour basis-like open cover de $\mathcal{S}(X')$, on prend $\{X' \cup \{w_{X'}\}, X' \cup \{w'_{X'}\}, X'\}$.
Par le Lemme 72, $X' \cup \{w_{X'}\}$ est contractile. Mais comme $T(f)^{-1}(X' \cup \{w_{X'}\}) = \nu(X \times]-1,1])$ qui est contractile, $T(f)_{|T(f)^{-1}(X' \cup \{w_{X'}\})}$ est une équivalence faible d'homotopie. On applique une démonstration similaire pour $X' \cup \{w'_{X'}\}$.
Puis, soit $\pi : X \times]-1,1[\longrightarrow X$ la projection canonique. Alors $T(f)_{|T(f)^{-1}(X')} = f \circ \pi$ donc est une équivalence faible d'homotopie par la propriété du deux sur trois (32)car f l'est, et ν est une projection, donc une équivalence d'homotopie (54), donc une équivalence faible d'homotopie (31).
Ainsi, par le Théorème I, $T(f)$ est une équivalence faible d'homotopie. □

Définition 77 ($g^n : \mathcal{S}^n \longrightarrow \mathcal{S}^n$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout A-espace X, on définit $g^n_X = T^n(\mathbf{id}_X) : \mathcal{S}^n(X) \longrightarrow \mathcal{S}^n(X)$, où T^n est la n-ième composition de T avec elle-même.

Proposition 78. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et toute application continue* $\psi : X \longrightarrow Y$ *entre A-espaces, on a la relation de commutativité :*

$$g^n{}_Y \circ S^n(\psi) = \mathcal{S}^n(\psi) \circ g^n{}_X.$$

Démonstration. Ceci découle directement du Lemme 75 en appliquant n fois le processus en partant de la relation $\mathbf{id}_Y \circ \psi = \psi \circ \mathbf{id}_X$. □

Proposition 79. *Pour tout A-espace X, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_X^n \ : \ S^n(X) \longrightarrow \mathcal{S}^n(X)$ est une équivalence faible d'homotopie.*

Démonstration. Ceci découle directement du Lemme 76 en appliquant n fois le processus en partant de l'équivalence faible d'homotopie $\mathbf{id}_X \ : \ X \longrightarrow X$. □

Remarque. De cette construction découle bien le Théorème V :

Théorème 80 (Théorème de McCord V - rappel)**.** *Le foncteur covariant $\mathcal{S} \ : \ \textbf{\textit{Top}} \longrightarrow \textbf{\textit{Top}}$ et la transformation $g \ : \ S \longrightarrow \mathcal{S}$ sont tels que :*

- *la classe des espaces finis (resp. localement finis, A-espaces, T_0-A-espaces) est envoyée sur elle-même par $\mathcal{S}$;*
- *Pour tout espace X, l'application $g_X \ : \ S(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ est une équivalence faible d'homotopie.*

7 Annexe

7.1 Topologies

Définition 81 (Topologie quotient)**.** Soient X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Soit $q : X \longrightarrow X_{/\sim}$ l'application quotient. On munit le quotient $X_{/\sim}$ de la *topologie quotient* définie par :

$$U \text{ est un ouvert de } X_{/\sim} \text{ si et seulement si } q^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } X.$$

Corollaire 82. *Soient X et Y deux espaces topologiques, X' un quotient de X muni de la topologie quotient, $q : X \longrightarrow X'$ l'application quotient et $f : X' \longrightarrow Y$. Alors*

$$f \text{ est continue si et seulement si } f \circ q : X \longrightarrow Y \text{ est continue.}$$

Définition 83 (Topologie produit)**.** Une base de la topologie produit sur l'espace produit cartésien $X \times Y$ est donné par les produits cartésiens $U \times V$, où U est un ouvert de X et V un ouvert de Y.

Définition 84 (Topologie compacte-ouverte)**.** Si X et Y sont deux espaces topologiques, la *topologie compacte-ouverte* de Y^X est la topologie engendrée par la base $S(K,W) = \{f \in Y^X;\ f(K) \subset W\}$, avec K $\subset X$ compact et $W \subset Y$ ouvert.

Proposition 85. *Soient X, Y et Z trois espaces. Alors il existe une bijection naturelle* $\begin{array}{cccc} \varphi : & (X \times Z \longrightarrow Y) & \longrightarrow & (Z \longrightarrow Y^X) \\ & f & \longmapsto & (z \longmapsto (x \mapsto f(x,z))) \end{array}$.
En particulier, si X, Y, et Z sont topologiques, $f : X \times Z \longrightarrow Y$ continue $\Longrightarrow$ $\varphi(f) : Z \longrightarrow Y^X$ continue, où Y^X est muni de la topologie compacte-ouverte.

Démonstration. On suppose X, Y, et Z topologiques et $f : X \times Z \longrightarrow Y$ continue. Soient K un compact de X et W un ouvert de Y. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(f)^{-1}(S(K,W)) &= \{z \in Z;\ \varphi(f)(z) \in S(K,W)\} \\ n &= \{z \in Z;\ \forall\, x \in K,\ \phi(f)(z)(x) \in W\} \\ &= \{z \in Z;\ \forall\, x \in K,\ f(x,z) \in W\} \\ &= \{z \in Z;\ \forall\, x \in K,\ (x,z) \in f^{-1}(W)\} \\ &= \pi_Z((K \times Z) \cap f^{-1}(W)) \\ &= \pi_Z(f^{-1}(W)) \end{aligned}$$

où π_z est la projection de $X \times Z$ sur Z.
f étant continue, $f^{-1}(W)$ est un ouvert, donc son image par π_Z aussi par définition de la topologie sur $X \times Y$. Ainsi $\phi(f)$ est continue. □

Remarque. La topologie faible est définie ici : 94.

7.2 Groupes d'homotopie

Définition 86 (Groupe d'homotopie)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera I_n le cube unité de dimension n. Soient X un espace topologique et $x \in X$.
Deux applications $\gamma,\ \eta : (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$ (i.e. $\gamma(\partial I_n) = \eta(\partial I_n) = \{x\}$) continues sont dites *homotopes* s'il existe $F : I_n \times [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que :

- $\forall\, y \in \partial I_n,\ \forall\, t \in [0,1],\ F(y,t) = x$;
- $F(\cdot, 0) = \gamma$ et $F(\cdot, 1) = \eta$.

Être homotope est une relation d'équivalence, et la classe d'équivalence d'une fonction γ sera notée $[\gamma]$.

Le *groupe d'homotopie d'ordre n* est
$\pi_n(X,x) = \{[\gamma];\ \gamma\ :\ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, \{x\})\ \textit{continue}\}$.
Ceci se généralise à n = 0 par : $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes de X.

Proposition 87. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\pi_n(X,x), +)$ est un groupe, de neutre la classe du chemin constant et de loi $[\gamma] + [\eta] = [\gamma + \eta]$ avec*

$$\begin{array}{rccc} \gamma+\eta: & I_n & \longrightarrow & X \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \gamma(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \textit{si } x_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \textit{si } x_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array}\right. \end{array}$$

et d'inverse $\begin{array}{rccc} -\gamma: & I_n & \longrightarrow & X \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \gamma(-x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$

Démonstration. Si γ et $\eta\ :\ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X, x)$ sont continues, comme $\gamma(1,\cdot) = \eta(0,\cdot)$, on a bien $\gamma + \eta\ :\ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X,x)$ continue, donc la somme est bien définie et est une loi interne sur $\pi_n(X,x)$. Puis, en notant x le chemin constant, on a bien $[x+\gamma] = [\gamma] = [\gamma + x]$, et $[\gamma + (-\gamma)] = [(-\gamma)+\gamma] = [x]$. ☐

Remarque. On pourrait aussi montrer que $\pi_n(X,x)$ est abélien.

Proposition 88. *Les applications f^* définis pour l'équivalence faible d'homotopie pour $n \geq 1$ sont des morphismes de groupes.*

Démonstration. Soient $\gamma,\ \eta\ :\ (I_n, \partial I_n) \longrightarrow (X,x)$ continues.
Alors

$$\begin{aligned} f_*([\gamma+\eta]) &= [(x_1,\dots,x_n) \mapsto \left\{\begin{array}{ll} f(\gamma(2x_1, x_2, \dots, x_n)) & \textit{si } x_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(\eta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n)) & \textit{si } x_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array}\right.] \\ &= [f\circ\gamma + f\circ\eta] \\ &= [f\circ\gamma] + [f\circ\eta] \\ &= f_*([\gamma]) + f_*([\eta]). \end{aligned}$$

☐

7.3 Complexes simpliciaux

Définition 89 (Simplexe et complexe simplicial géométriques)**.** Soit E un espace affine.

- Un *simplexe* dans E est l'enveloppe convexe de points dont aucun n'est barycentre des autres.
- Ces points sont appelés *sommets* du simplexe.
- Les *faces* sont les enveloppes convexes des sous-ensembles des sommets.
- Un *complexe simplicial* dans E est un ensemble K de simplexes tels que :
  - — toutes les faces de chaque simplexe sont dans K ;
  - — l'intersection non vide de deux simplexes est l'une de leurs faces.

Remarque. Par exemple, l'ensemble des faces d'un simplexe est un complexe simplicial.
Un triangle est un simplexe. C'est un complexe simplicial composé de trois sommets, trois arêtes et d'une surface intérieure triangulaire.
Un tétraèdre est un simplexe. C'est un complexe simplicial composé de quatre sommets, six arêtes, quatre surfaces triangulaires et d'un volume intérieur.

Définition 90 (Complexe simplicial combinatoire)**.** Un *complexe simplicial* abstrait est un ensemble V (les *sommets*), muni d'un ensemble Σ (les *faces*) de parties finies non vides de V qui est stable par sous-parties non vides (i.e. toute partie non vide d'une face est aussi une face), tel que tout sommet appartienne à un nombre fini non nul de faces.

Définition 91 (Application simpliciale)**.** Une application $f : V_1 \longrightarrow V_2$ entre sommets de deux complexes simpliciaux abstraits $K_1 = (V_1, \Sigma_2)$ et $k_2 = (V_2, \Sigma_2)$ est une *application simpliciale* notée $f : K_1 \longrightarrow K_2$ si l'image de toute face de V_1 est une face de V_2.

Définition 92 (Sous-complexe et sous-complexe total)**.** Soit $\mathcal{K} = (V_\mathcal{K}, \Sigma_\mathcal{K})$ un complexe simplicial. Un *sous-complexe* de $\mathcal{K}$ est un complexe simplicial $L = (V_L, \Sigma_L)$ tel que $V_L \subset V_\mathcal{K}$ et $\Sigma_L \subset \Sigma_\mathcal{K}$.
Il est dit *total* si tout simplexe de $\mathcal{K}$ ayant tous ses sommets dans L est un simplexe de L.
Dans ce cas, L est un *sous-complexe total de $\mathcal{K}$ porté par les sommets de V_L*.

Définition 93 (Réalisation géométrique)**.** Soit $K = (V, \Sigma)$ un complexe simplicial abstrait. Sa *réalisation géométrique* $|K|$ est un espace topologique construit par recollement des simplexes qui étant en tout dimension la suite "point, arête, triangle, tétraèdre,...".
Concrètement, la construction se fait par l'identification unique (unique car l'intersection de deux simplexes est une face) de point d'une face de $|K|$ à un barycentre (avec coefficients positifs pour préserver la structure d'enveloppe convexe) de sommets d'une face de Σ.

Remarque. La construction suivante fait le lien entre les deux notions.

Définition 94 (Topologie de la réalisation géométrique)**.** Soit $K = (V, S)$ un complexe simplicial (abstrait).

— Soit $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ un simplexe. Alors le *simplexe fermé* $\overline{\sigma}$ est l'ensemble des combinaisons convexes formelles $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$, avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k \geq 0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$.

— Pour tout tel $\sigma \in K$, $\overline{\sigma}$ est un espace métrique dont la distance d est donnée par :

$$d(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k, \sum_{k=0}^{n} \beta_k v_k) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \beta_k)^2}.$$

— La *réalisation géométrique* $|K|$ de K est alors l'union des simplexes fermés $\overline{\sigma}$ pour tout $\sigma \in K$.

— La *topologie faible* sur $|K|$ est la topologie finale induite par les simplexes fermés i.e.
$U \subset |K|$ est ouvert (resp. fermé) si et seulement si $U \cap \overline{\sigma}$ est ouvert (resp. fermé) dans l'espace métrique $\overline{\sigma}$ pour tout $\sigma \in K$.

— La *topologie métrique* sur $|K|$ est celle induite par les distances d sur chaque $\overline{\sigma}$ i.e.

$$d(\sum_{v \in V} \alpha_v v, \sum_{v \in V} \beta_v v) = \sqrt{\sum_{v \in V} (\alpha_v - \beta_v)^2}.$$

— Le *support* d'un point $x = \sum\limits_{v \in V} \alpha_v v \in |K|$ est le simplexe support$(x) = \{v ; \alpha_v > 0\} \in S$.

— Si $\sigma \in S$, le *simplexe ouvert* $\mathring{\sigma}$ est l'ensemble des points de $\overline{\sigma}$ dont le support est exactement σ.

Remarque. Si $L \subset K$, alors $|L|$ est un fermé de $|K|$.
Les deux topologies coïncident si et seulement si V est localement fini.

Proposition 95. *Une application simpliciale $\varphi : K \longrightarrow L$ induit une application continue (et bien définie)* $|\varphi| : \begin{array}{ccc} |K| & \longrightarrow & |L| \\ \sum\limits_{v \in V} \alpha_v v & \longmapsto & \sum\limits_{v \in V} \alpha_v \varphi(v) \end{array}$.

Démonstration. Soient $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\} \in L$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ et $r > 0$.

Alors

$$|\varphi|^{-1}(B(x,r)) = \{y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k \ ; \ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \overline{\beta_k})^2} < r, \quad \text{pour } \tau = \{w_1, \dots, w_k\} \in K \text{ tel que } \varphi(\tau) \subset \sigma \text{ et}$$

$$\overline{\beta_k} = \sum \beta_i, \text{ pour i tel que } w_i \in \varphi^{-1}(\{v_k\}) \cap \tau\}$$

$$= \bigcup_{\tau \subset \varphi^{-1}(\sigma)} B(\sum_{w \in \tau} \alpha_w w, \ r).$$

Comme réunion de boules ouvertes, c'est un ouvert, donc $|\varphi^{-1}|$ est bien continue. □

Définition 96 (Barycentre)**.** Pour tout simplexe $\sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal n, on définit son *barycentre* par $b(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{n} x_k$.

Définition 97 (Subdivision barycentrique)**.** Soit K un complexe simplicial. Sa *première subdivision barycentrique* est le complexe simplicial dont :

- les sommets sont les barycentres de toute simplexe de K ;
- les simplexes sont les $\{b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_n)\}$ avec $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n$ simplexes de K tels que $\forall \ k \in [\![1, n]\!], \ |\sigma_k| = k$.

Proposition 98. *En notant K' la première subdivision barycentrique de K, on a $|K| = |K'|$.*

Démonstration. · Soit $x \in |K|$. On peut écrire $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ avec pour tout $k \in [\![1, n]\!], \ \alpha_k > 0, \ x_k \in K, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ et $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. Notons pour tout $k \in [\![1, n]\!], \ \sigma_k = \{x_1, \dots, x_k\}$.

Alors on a $x = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k} \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k b(\sigma_k)$, et donc $x \in \overline{\{b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_n)\}}$.

Ainsi, $x \in |K'|$, et donc $|K| \subset |K'|$.

· Soit $x \in |K'|$. On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ avec pour tout $k \in [\![1, n]\!], \ \alpha_k > 0, \ x_k \in K'$ et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

Mais pour chaque $k \in [\![1, n]\!], \ x_k$ s'écrit $\sum_{l=1}^{n_k} \alpha_k^{(l)} x_k^{(l)}$ avec $l \in [\![1, n_k]\!], \ \alpha_k^{(l)} > 0, \ x_k^{(l)} \in K$ et $\sum_{l=1}^{n_k} \alpha_k^{(l)} = 1$.

Donc $x = \sum_{1 \leq k \leq n \ ; \ 1 \leq l \leq n_k} \alpha_k^{(l)} x_k^{(l)}$.

Ainsi, $x \in |K|$, donc $|K'| \subset |K|$.

On a donc bien $|K| = |K'|$. □

Définition 99 (Cône simplicial)**.** Un *cône simplicial de pointe v* est un complexe simplicial $\mathrm{cone}(K, v)$ avec K un complexe simplicial ne contenant pas v, tel que pour tout simplexe $\sigma \in \mathrm{cone}(K, v)$, $\sigma \cup \{v\}$ est un simplexe de $\mathrm{cone}(K, v)$, et $v \notin \sigma \Leftrightarrow \sigma \in K$.

Proposition 100. *Pour tout cône simplicial $L = \mathrm{cone}(K, v)$, $|L|$ est contractile.*

Démonstration. $F : \begin{array}{ccc} [0,1] \times |L| & \longrightarrow & |L| \\ (t, x) & \longmapsto & tv + (1-t)x \end{array}$ défini une rétraction de $|L|$ à $\{v\}$. □

7.4 Foncteur covariant et suspension

Définition 101 (Foncteur covariant)**.** Un foncteur $F : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}$ est *covariant* si

- pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on a $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$;
- pour tous $f, g \in Hom(\mathbf{Top})$, $F(fg) = F(f)F(g)$;

— pour tout $X \in \mathbf{Top}$, $F(\mathbf{id}_X) = \mathbf{id}_{F(X)}$.

Définition 102 (Suspensions). — La *suspension d'un espace* X est $S(X) = X \times [0,1]/_{(X\times\{0\};X\times\{1\})}$. Conceptuellement, on obtient $S(X)$ en étirant X en un cylindre, avant d'identifier chaque face extérieure à un unique point.

— La *suspension d'une application continue* $f : X \longrightarrow Y$ est l'application continue $S(f) : \begin{array}{ccc} S(X) & \longrightarrow & S(Y) \\ [x,t] & \longmapsto & [f(x),t] \end{array}$.

Proposition 103. *Ces constructions forment un foncteur covariant* S *de la catégorie* ***Top*** *dans elle-même.*

Références

[1] Jonathan A Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, volume 2032. Springer, 2011.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[3] Michael C McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. 1966.