

# Percolation de Bernoulli et transport de masse sur des graphes de Cayley non moyennables

Damis EL ALAMI, encadré par Hugo VANNEUVILLE

Année 2022-2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Le problème</b>	<b>2</b>
2.1	Vocabulaire sur les graphes . . . . .	2
2.2	Graphes de Cayley . . . . .	3
2.3	Graphes non moyennables . . . . .	4
2.4	Percolations de Bernoulli . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Le transport de masse</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Autour du paramètre critique</b>	<b>9</b>
4.1	Couplage croissant et inégalité FKG . . . . .	9
4.2	Ergodicité de la percolation de Bernoulli . . . . .	12
4.3	Probabilité de l'évènement " $N(\omega) > 0$ " pour $p \neq p_c$ . . . . .	13
<b>5</b>	<b><math>N(\omega)</math> au paramètre critique</b>	<b>14</b>
5.1	$N(\omega)$ n'est pas fini strictement supérieur à 1 . . . . .	14
5.2	$N(\omega)$ ne vaut pas 1 . . . . .	16
5.3	$N(\omega)$ n'est pas infini . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Unicité ou non des composantes connexes infinies</b>	<b>20</b>
6.1	$N(\omega)$ est presque sûrement fini dans le cas moyennable . . . . .	20
6.2	L'unicité est monotone . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Preuve du théorème 1.1</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Indistinguabilité des composantes connexes infinies</b>	<b>23</b>
8.1	Marches aléatoires simples retardées . . . . .	24
8.2	Suite et fin . . . . .	27

<b>9</b>	<b>Une étude de cas : <math>T \times \mathbb{L}</math></b>	<b>28</b>
9.1	Il existe un intervalle non trivial d'unicité pour $\mathbb{L}^2$ . . . . .	29
9.2	La connectivité diminue avec la distance si $N \neq 1$ p.s. . . . .	31
9.3	Il existe un intervalle non trivial d'unicité pour $T \times \mathbb{L}$ . . . . .	32
9.4	Conclusion . . . . .	32

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à un modèle aléatoire sur des graphes : la percolation de Bernoulli, qui consiste à "effacer" d'un graphe donné  $X$  indépendamment chacune de ses arêtes avec probabilité  $p$ .

Une variable aléatoire qui nous intéressera tout particulièrement est le nombre de composantes connexes infinies  $N(\omega)$  du graphe aléatoire obtenu  $\omega$ . Pour pouvoir utiliser un outil très important, le principe du transport de masse, nous nous restreindrons à une classe particulière de graphes : les graphes de Cayley. Un graphe de Cayley est un graphe dont les sommets sont les éléments d'un groupe généré par une partie finie, et les arêtes relient un élément au produit de cet élément et d'un générateur.

Cela nous permettra d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *Soit  $X$  un graphe de Cayley d'un groupe  $G$  de neutre  $o$ , soit  $p \in [0, 1]$  et soit  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur  $X$ . Alors :*

- si  $X$  est moyennable, il existe  $1/(\deg_X(o) - 1) \leq p_c \leq 1$  tel que
  - si  $p \in [0, p_c[$ ,  $N(\omega) = 0$  p.s.,
  - si  $p \in ]p_c, 1]$ ,  $N(\omega) = 1$  p.s.,
- si  $X$  n'est pas moyennable, il existe  $1/(\deg_X(o) - 1) \leq p_c \leq p_u \leq 1$  tels que :
  - si  $p \in [0, p_c]$ ,  $N(\omega) = 0$  p.s.,
  - si  $p \in ]p_c, p_u[$ ,  $N(\omega) = \infty$  p.s.,
  - si  $p \in ]p_u, 1]$ ,  $N(\omega) = 1$  p.s.,
 et  $p_c \leq 1 - \iota_E(X) / \deg_X(o) < 1$ .

Un graphe est dit moyennable si on peut trouver une partie  $F$  finie de son ensemble de sommets dont la frontière est proportionnellement à son cardinal arbitrairement petite.

Par la suite nous nous pencherons sur un graphe particulier,  $T \times \mathbb{L}$ , et nous montrerons que dans son cas  $p_u \leq 1/2$  à l'aide d'un théorème d'indistinguabilité des composantes connexes d'une percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley.

# 2 Le problème

Nous allons nous intéresser à un ensemble très spécifique de graphes : les graphes de Cayley non moyennables. Dans toute la suite,  $G$  sera un groupe infini noté multiplicativement et de neutre  $o$ .

## 2.1 Vocabulaire sur les graphes

Un *graphe*  $X$  est un couple  $(V(X), E(X))$  où  $V(X)$  est un ensemble quelconque et  $E(X) \subset \{p \in \mathcal{P}(V(X)) \mid |p| = 2\}$ . On appelle *sommet de  $X$*  un élément de  $V(X)$  et *arête*

de  $X$  un élément de  $\mathbf{E}(X)$ .

Si il n'y a pas d'ambiguïté on écrira  $V$  pour  $V(X)$ . On dit qu'une arête  $[u, v] = [v, u] := \{u, v\}$  relie les sommets  $u$  et  $v$ , et qu'elle est incidente à  $u$  et à  $v$ . On dit que deux sommets  $u$  et  $v$  sont voisins dans  $X$  s'il existe une arête de  $X$  les reliant.

Soit  $X$  un graphe et  $v$  un sommet de  $X$ . On appelle *degré de  $v$  dans  $X$*  et on note  $\deg_X(v)$  le nombre d'arêtes de  $X$  incidentes à  $v$ . On dit que  $X$  est *régulier de degré  $d$*  si pour tout sommet  $v$  de  $X$ ,  $\deg_X(v) = d$ .

On appelle *chaîne de  $X$  reliant  $u$  et  $v$  de longueur  $n$*  une famille finie de sommets  $(u = v_0, \dots, v_n = v)$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, n - 1$ ,  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont voisins dans  $X$ . On dit que la chaîne passe par les sommets  $v_1, \dots, v_n$ , et que les arêtes  $[v_1, v_2], \dots, [v_{n-1}, v_n]$  sont ses arêtes.

Un *cycle* est une chaîne reliant un sommet  $u$  à lui-même.

On définit la distance  $d_X$  sur  $X$  entre deux sommets  $u$  et  $v$  comme le minimum des longueurs des chaînes reliant  $u$  et  $v$ , avec la convention  $\min(\emptyset) = \infty$ .

D'une chaîne entre  $u$  et  $v$  on peut déduire une chaîne entre  $v$  et  $u$  obtenue en renversant l'ordre, et on peut concaténer une chaîne entre  $u$  et  $v$  et une chaîne entre  $v$  et  $w$  pour obtenir une chaîne entre  $u$  et  $w$ . La relation binaire "il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ " est donc une relation d'équivalence, et on appelle *composante connexe de  $v$*  la classe d'équivalence de  $v$  pour cette relation. Un graphe  $X$  est dit *connexe* si il n'admet qu'une seule composante connexe.

Si pour une chaîne  $(v_1, \dots, v_n)$  on a  $v_i = v_j$  pour certains  $i < j$ , la chaîne  $(v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$  est une chaîne entre  $v_1$  et  $v_n$ . Puisqu'une chaîne passe par un nombre fini de sommets, on peut donc toujours en extraire de cette manière une chaîne passant au plus une fois par chaque sommet de  $X$ . On appelle une telle chaîne *chaîne élémentaire*.

Soit  $X, Y$  deux graphes. On appelle *morphisme de graphe de  $X$  sur  $Y$*  une application  $\varphi : V(X) \rightarrow V(Y)$  telle pour toute arête  $[u, v]$  de  $X$ ,  $[\varphi(u), \varphi(v)]$  est une arête de  $Y$ . On appelle *isomorphisme de graphe de  $X$  sur  $Y$*  un morphisme de graphe bijectif de  $X$  sur  $Y$  dont la réciproque est un morphisme de graphe de  $Y$  sur  $X$ , et *automorphisme de graphe de  $X$*  un isomorphisme de graphe de  $X$  sur  $X$ .

Un *graphe orienté*  $X$  est défini comme un graphe, mais ses arêtes ne sont pas des paires mais des couples. On dit qu'une arête  $(u, v)$  de  $X$  est orientée de  $u$  vers  $v$ , ou encore que  $u$  est son début et  $v$  sa fin. Les concepts énoncés ci-dessus se transposent dans le cas des graphes orientés de manière naturelle; pour lever les ambiguïtés, on parlera parfois d'*arête orientée* au lieu d'arête et de *chemin* au lieu de chaîne.

## 2.2 Graphes de Cayley

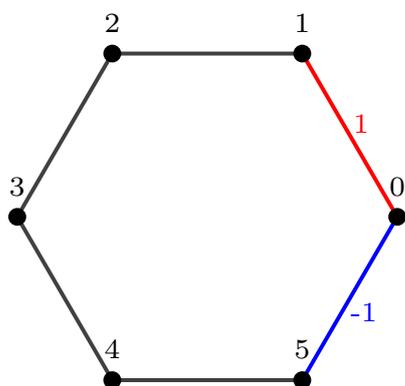
**Définition 2.1.** Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$  stable par inverse. On appelle *graphe de Cayley de  $G$  pour  $S$*  et on note  $Cay(G, S)$  le graphe  $X := (V, E(X))$  avec  $V = G$  et  $E(X) = \{[v, vs] \mid v \in V, s \in S\}$ .

$X$  est un graphe connexe, régulier sur lequel  $G$  agit par automorphisme de graphe de manière sommet-transitive sur  $X$  (i.e. pour tout couple de sommets  $(u, v)$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $g \cdot u := gu = v$ ).

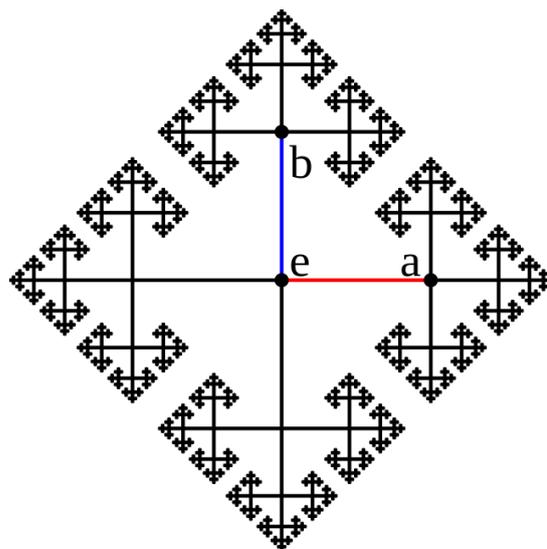
*Démonstration.* Tout élément  $g$  de  $G$  s'écrit  $g = s_1 s_2 \dots s_n$ ,  $s_1, \dots, s_n \in S$ . Donc il existe une chaîne  $[o, s_1][s_1, s_1 s_2] \dots [s_1 \dots s_{n-1}, g]$  entre  $o$  et  $g$ . Donc la composante connexe de  $o$  est  $V$  et  $X$  est connexe.

Soit  $u$  un sommet de  $X$ . L'ensemble des sommets de  $X$  voisins de  $u$  est l'ensemble des éléments  $v$  de  $G$  tels que  $v = us$  ou  $u = vs$  pour un certain  $s \in S$ . Or si  $u = vs$ ,  $v = us^{-1}$ , donc l'ensemble des voisins de  $u$  est l'ensemble  $\{us \mid s \in S \cup S^{-1}\}$ . Par injectivité de l'action par translation à gauche de  $u$  sur  $G$ , on a donc  $\deg_X(u) = |S \cup S^{-1}|$ .  $X$  est donc régulier.

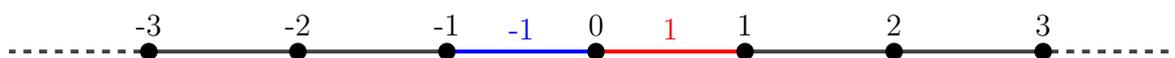
Enfin, pour tout  $g \in G$ , l'action par translation à gauche de  $g$  est un automorphisme de graphe : elle est bijective, et pour toute  $[u, v] = [u, us] \in E(X)$ ,  $[gu, gus] \in E(X)$ . En particulier, pour tous  $u, v \in V$ , l'action par translation à gauche de  $vu^{-1}$  envoie  $u$  sur  $v$ .  $X$  est donc sommet-transitif.  $\square$



(a) Graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  pour les générateurs 1 et -1.



(b) Graphe de Cayley du groupe libre  $F_{\{a,b\}}$  pour  $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$  ([Wik21]).



(c) Graphe de Cayley de  $(\mathbb{Z}, +)$  pour les générateurs 1 et -1.

FIGURE 1 – Trois exemples de graphes de Cayley.

L'arbre régulier de degré  $d$  est un exemple important de graphe de Cayley : c'est le graphe de Cayley du groupe libre  $F_T$  des mots simplifiés sur  $T \cup T^{-1}$ , qui est de cardinal  $d$ , pour la partie génératrice  $T \cup T^{-1}$  ; on peut prendre  $d$  impair en prenant un générateur qui est son propre inverse.

## 2.3 Graphes non moyennables

**Définition 2.2.** Soit  $X$  un graphe et  $K$  une partie de  $X$ .

On appelle *frontière de  $K$  pour les sommets* et on note  $\partial_V(K)$  l'ensemble des sommets de  $K$  voisins dans  $X$  d'un sommet de  $V \setminus K$ .

On appelle *frontière de  $K$  pour les arêtes* et on note  $\partial_E(K)$  l'ensemble des arêtes de  $X$  incidentes à un sommet de  $K$  et à un sommet de  $V \setminus K$ .

Par extension on écrira dans la suite  $\partial_E(Y)$  ou  $\partial_V(Y)$  où  $Y$  est un sous-graphe de  $X$  pour  $\partial_E(V(Y))$  ou  $\partial_V(V(Y))$ .

Si  $Y$  est un sous-graphe fini de  $X$ , on définit de plus les deux quantités suivantes :

$$\iota_Y := \frac{|\partial_E(Y)|}{|V(Y)|}$$

et :

$$\alpha_Y := \frac{1}{|V(Y)|} \sum_{v \in V(Y)} \deg_Y(v),$$

où  $\deg_Y(v)$  est le degré de  $v$  en tant que sommet de  $Y$ .

**Définition 2.3.** On appelle *constante isopérimétrique* de  $X$

$$\iota_E(X) := \inf \{ \iota_Y \mid Y \text{ sous-graphe fini de } X \}$$

et on appelle *graphe moyennable* un graphe dont la constante isopérimétrique est nulle.

Dire que  $X$  est non moyennable revient donc à dire qu'on ne peut jamais négliger les bords d'un sous-graphe fini  $Y$  en le rendant suffisamment grand.

**Proposition 2.4** ([Ben+99]). *Si  $X$  est un graphe régulier,  $Y$  un sous-graphe fini de  $X$ ,  $\deg_X(o) = \alpha_Y + \iota_Y$ , et si on note :*

$$\alpha(X) := \sup \{ \alpha_Y \mid Y \text{ sous-graphe fini de } X \},$$

*on a  $\deg_X(o) = \alpha(X) + \iota_E(X)$  et  $X$  est non-moyennable si et seulement si  $\alpha(X) < \deg_X(o)$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y$  un sous-graphe fini de  $X$ . Notons  $\delta_\iota := \iota_Y - \iota_E(X)$  et  $\delta_\alpha := \alpha(X) - \alpha_Y$ . On a :

$$\begin{aligned} \deg_X(o) &= \frac{1}{|V(Y)|} \sum_{v \in V(Y)} \deg_X(v) \\ &= \frac{1}{|V(Y)|} \sum_{v \in V(Y)} (|\{[v, u] \in E(X); u \notin V(Y)\}| + \deg_Y(v)) \\ &= \frac{1}{|V(Y)|} \left( \partial_E(Y) + \sum_{v \in V(Y)} \deg_Y(v) \right) \\ &= \iota_Y + \alpha_Y \end{aligned}$$

et donc :

$$\iota_E(X) + \alpha(X) - \delta_\alpha \leq \deg_X(o) \leq \iota_E(X) + \delta_\iota + \alpha(X).$$

Par définition de  $\iota_E(X)$ , on peut trouver un sous-graphe fini de  $X$  qui rend  $\delta_\iota$  aussi petit qu'on veut, ce qui prouve que  $\deg_X(o) \leq \iota_E(X) + \alpha(X)$ . On peut de la même manière trouver un sous-graphe fini  $Y$  de  $X$  qui rend  $\delta_\alpha$  aussi petit qu'on veut, et on a donc  $\deg_X(o) \geq \iota_E(X) + \alpha(X)$  et enfin  $\deg_X(o) = \iota_E(X) + \alpha(X)$ .  $\square$

L'exemple donné précédemment de l'arbre régulier de degré  $n$  supérieur ou égal à 3 est un exemple de graphe non moyennable :

**Proposition 2.5.** *Soit  $X$  une forêt, c'est à dire un graphe sans cycle, dont tous les sommets sont de degré au moins 3. Si  $F$  est une partie finie de  $\mathbf{V}$ ,  $2|\partial_{\mathbf{V}}(F)| \geq |\mathbf{V}(F)|$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y$  un sous-graphe fini de  $X$ . L'ensemble  $\mathbf{V}(Y)$  est fini, on peut donc le construire en un nombre fini d'étapes  $L_0 = \emptyset \subset \dots \subset L_r = \mathbf{V}(Y)$  comme suit : pour créer  $L_{k+1}$ , si au moins un sommet  $v$  de  $L_k$  admet un voisin dans  $Y$ , on en choisit un et on ajoute tous les voisins de  $v$  dans  $Y$ . Si ce n'est le cas d'aucun des sommets, on ajoute un sommet quelconque de  $Y \setminus L_k$ , de manière à ce qu'aucun sommet de  $L_{k+1} \setminus L_k$  n'est jamais voisin de plus d'un sommet de  $L_{k+1}$  car  $X$  est une forêt.

On va démontrer l'inégalité  $2|\partial_{\mathbf{V}}(Y)| \geq |\mathbf{V}(Y)|$  par récurrence sur la suite des  $L_k$ . Elle est clairement vraie pour  $L_0$ . Supposons de plus que pour  $0 \leq k < r$ , on a  $2|\partial_{\mathbf{V}}(L_k)| \geq |\mathbf{V}(L_k)|$ . Selon que pour construire  $L_{k+1}$  on ajoute 1 ou  $m \geq 2$  sommets, on a ajouté respectivement 1 ou  $m - 1$  sommets à la frontière et l'inégalité tient toujours. Par récurrence on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Sous les mêmes hypothèses  $X$  est non moyennable.*

*Démonstration.* On le déduit immédiatement de la proposition 2.5 et du fait que pour toute partie finie  $F$  de  $X$ ,  $|\partial_{\mathbf{E}}(F)| \geq |\partial_{\mathbf{V}}(F)|$ .  $\square$

## 2.4 Percolations de Bernoulli

**Définition 2.7.** Un modèle de percolation sur un graphe  $X$  est une famille de variables aléatoires  $(x_e)_{e \in \mathbf{E}(X)}$  chacune à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Le sous-graphe de percolation de  $X$  suivant le modèle  $x$  est la variable aléatoire  $\omega := (\mathbf{V}, \{e \in \mathbf{E}(X) \mid x_e = 1\})$  à valeur dans  $(S(X), \mathcal{C})$  où  $S(X)$  est l'ensemble des sous-graphes de  $X$  de sommets  $\mathbf{V}$  et  $\mathcal{C}$  la tribu cylindrique engendrée par les fonctions  $\mathbb{1}_{e \in \mathbf{E}(\omega)}$ .

Une percolation  $\omega$  sur un graphe de Cayley  $X$  est donc  $X$  duquel on a aléatoirement retiré des arêtes. On dira qu'une arête  $e$  est *ouverte* si  $x_e = 1$ , c'est à dire si c'est une arête de  $\omega$ , et *fermée* sinon.

La question fondamentale qui nous intéresse dans l'étude des percolations est la présence et le nombre de composantes connexes infinies de  $\omega$ . On notera dans la suite  $K(v)$  la composante connexe dans  $\omega$  du sommet  $v$  et  $N(\omega)$  le nombre de composantes connexes infinies de  $\omega$ . Notons que l'évènement " $\omega$  admet une composante connexe infinie" est  $\sigma(\omega)$ -mesurable; il peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \{N(\omega) > 0\} &= \{\exists v \in \mathbf{V}, |K(v)| = \infty\} \\ &= \bigcup_{v \in \mathbf{V}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{u \in K(v)} \{d_X(u, v) = n\}. \end{aligned}$$

où  $d_X$  est la distance usuelle sur le graphe  $X$ .

L'évènement  $\{N(\omega) > 0\}$  est donc  $\mathcal{C}$ -mesurable, et on peut construire de manière similaire les évènements "il existe exactement  $k$  composantes connexes infinies dans  $\omega$ " pour  $k$  dans  $\overline{\mathbb{N}}$ .

Ces probabilités dépendent bien évidemment de la loi de  $\omega$ . Nous allons donc nous restreindre à un ensemble de lois précises :

**Définition 2.8.** Une percolation est dite *percolation de Bernoulli de paramètre  $p$*  ou *percolation  $p$ -Bernoulli* si le modèle qu'elle suit est une famille indépendante identiquement distribuée telle que pour toute arête  $e$ ,  $\mathbb{P}(x_e = 1) = p$ .

Ainsi pour une percolation de Bernoulli sur  $X$ , les évènements " $e$  est ouverte" pour  $e$  arête de  $X$  sont i.i.d. Cette régularité nous donne accès à de nombreux outils, dont le transport de masse.

### 3 Le transport de masse

Soit  $X$  un graphe, et  $\Gamma$  un groupe qui agit par automorphismes de graphe sur  $X$ . Le groupe  $\Gamma$  agit aussi sur un modèle de percolation  $(x_e)_{e \in E(X)}$  comme suit :

$$\gamma \cdot (x_e) := (x_{\gamma^{-1} \cdot e}),$$

où  $\gamma$  agit sur une arête  $[u, v]$  par  $\gamma \cdot [u, v] := [\gamma \cdot u, \gamma \cdot v]$ , et induit la même action sur  $\omega$ .

Une percolation  $\omega$  est dite  $\Gamma$ -invariante si son modèle et donc elle-même est invariante par l'action de  $\Gamma$ , i.e. pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ ,  $(x_{\gamma^{-1} \cdot e})$  est égale en loi à  $(x_e)$  et  $\gamma \cdot \omega$  égale en loi à  $\omega$ . Une percolation sur  $X$  dont le modèle est i.i.d., c'est à dire une percolation de Bernoulli, est invariante pour l'action de tout sous-groupe du groupe des automorphismes de  $X$ . Plus généralement un  $n$ -uplet  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  est  $\Gamma$ -invariant si pour  $\gamma \in \Gamma$ ,  $(\gamma \cdot \omega_1, \dots, \gamma \cdot \omega_n)$  et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  ont la même loi.

Voici maintenant l'outil qui est au centre de ce mémoire :

**Théorème 3.1** (Principe du transport de masse). *Soit  $X = (\mathbf{V}, \mathbf{E}(X))$  un graphe de Cayley de  $G$  et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  un  $n$ -uplet de percolations sur  $X$  invariant par l'action naturelle de  $G$ . On appelle transport de masse une fonction mesurable  $m$  de  $\mathbf{V}^2 \times S(X)^n$  dans  $\mathbb{R}^+$  invariante par l'action diagonale de  $G$ , i.e. pour tous  $(x, y, \omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbf{V}^2 \times S(X)^n$ ,  $g \in G$ ,  $m(x, y; \omega_1, \dots, \omega_n) = m(g \cdot x, g \cdot y; g \cdot \omega_1, \dots, g \cdot \omega_n)$ . On note  $M(x, y) = \mathbb{E}(m(x, y; \omega_1, \dots, \omega_n))$  et on a :*

$$\forall x \in \mathbf{V}, \sum_{y \in \mathbf{V}} M(x, y) = \sum_{y \in \mathbf{V}} M(y, x)$$

*Démonstration.* Tout d'abord remarquons que pour  $x, y \in \mathbf{V}, g \in G$  :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \mathbb{E}(m(x, y; \omega_1, \dots, \omega_n)) \\ &= \mathbb{E}(m(x, y; g^{-1} \cdot \omega_1, \dots, g^{-1} \cdot \omega_n)) && \text{(par } G\text{-invariance de } \omega_1, \dots, \omega_n) \\ &= \mathbb{E}(m(g \cdot x, g \cdot y; \omega_1, \dots, \omega_n)) && \text{(par invariance de } m \text{ par l'action de } g) \\ &= M(g \cdot x, g \cdot y). \end{aligned}$$

Et ainsi on obtient :

$$\sum_{y \in \mathbf{V}} M(x, y) = \sum_{g \in G} M(x, g \cdot x) = \sum_{g \in G} M(g^{-1} \cdot x, x) = \sum_{y \in \mathbf{V}} M(y, x).$$

□

On conservera dans la suite la notation  $M(x, y) := \mathbb{E}(m(x, y; \omega_1, \dots, \omega_n))$ .

On peut interpréter la fonction  $m(u, v; \omega_1, \dots, \omega_n)$  comme la quantité de masse transportée du sommet  $u$  au sommet  $v$ . Le principe du transport de masse nous dit simplement que l'intuition qu'on peut avoir que chaque sommet reçoit "en moyenne" autant que ce qu'il envoie est justifiée.

Afin de donner un exemple concret d'utilisation du principe du transport de masse, démontrons un résultat qui nous sera utile plus tard :

**Définition 3.2.** Un point de rencontre d'une percolation  $\omega$  sur un graphe  $X$  est un point  $v \in V$  tel que  $K(v) \setminus \{v\}$  induise un sous-graphe de  $X$  possédant au moins trois composantes connexes infinies distinctes.

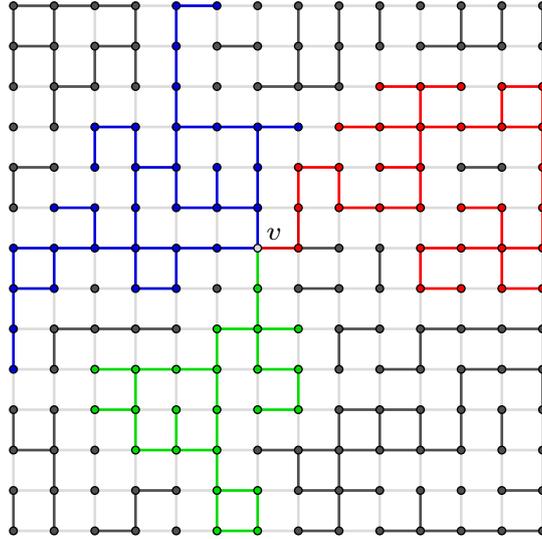


FIGURE 2 – Un point de rencontre  $v$

**Lemme 3.3.** Soit  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$ . Si pour tout sommet  $v$  de  $X$ ,  $v$  est point de rencontre avec probabilité non nulle, pour chaque point de rencontre  $v$  et pour chaque composante infinie  $C$  du sous-graphe induit par  $K(v) \setminus \{v\}$ , il existe un point de rencontre de  $\omega$  dans  $C$  p.s.

*Démonstration.* Définissons une fonction  $m : V^2 \times S(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :

- $m(u, v; \omega) := 1$  si  $K(u) = K(v)$ , si  $v$  est un point de rencontre de  $\omega$  et si pour tout  $w \neq v$  point de rencontre de  $\omega$ ,  $d_\omega(u, w) > d_\omega(u, v)$ ,
- $m(u, v; \omega) := 0$  sinon.

Il s'agit d'un transport de masse. En effet, soient  $[u, v] \in E(\omega)$ ,  $g \in G$ ,  $(x_e)_{e \in E(X)}$  le modèle de  $\omega$ . Comme  $G$  agit par automorphisme sur  $X$ ,  $[g \cdot u, g \cdot v] \in E(X)$  et  $x_{g^{-1} \cdot [g \cdot u, g \cdot v]} = x_{[u, v]} = 1$  et donc  $[g \cdot u, g \cdot v] \in E(g \cdot \omega)$ . En faisant agir de même  $g^{-1}$ , on a :

$$[u, v] \in E(\omega) \Leftrightarrow [g \cdot u, g \cdot v] \in E(g \cdot \omega) \quad (3.1)$$

car pour toute arête  $e$  de  $X$ ,  $g \cdot x_{g \cdot e} = x_e$ .

On en déduit que  $d_\omega(u, v) = d_{g \cdot \omega}(g \cdot u, g \cdot v)$  et que la composante connexe d'un sommet  $w$  dans  $g \cdot \omega$  est  $g \cdot K(w)$ . Ainsi  $v$  est un point de rencontre de  $\omega$  si et seulement si  $g \cdot v$  est un point de rencontre de  $g \cdot \omega$  et  $m$  est bien invariante par l'action diagonale de  $G$ .

On peut donc appliquer le principe du transport de masse : pour tout  $v$  dans  $V$ ,  $\sum_{u \in V} m(v, u; \omega) \in \{0, 1\}$ . Par conséquent,  $\sum_{u \in V} M(u, v) = \sum_{u \in V} M(v, u) \leq 1$ . Or soit  $v$  un point de rencontre de  $\omega$ , s'il existait une composante connexe  $C$  du sous-graphe induit par  $K(v) \setminus \{v\}$  qui ne contenait pas de point de rencontre, tout sommet  $u$  de  $C$  vérifierait  $m(u, v; \omega) = 1$  car tout chemin vers un point de rencontre autre que  $v$  devrait passer par  $\omega$ , sinon il serait dans  $C$ . On aurait alors  $\sum_{u \in V} m(u, v; \omega) = \infty$  et comme l'évènement " $v$  point de rencontre de  $\omega$ " est de probabilité non nulle,  $1 \geq \sum_{u \in V} M(u, v) = \infty$ , ce qui est absurde.  $\square$

On est ici entré dans le détail de la preuve que  $m$  est un transport de masse ; on remarquera que d'après (3.1), et parce que  $G$  agit par automorphisme, une fonction  $m$  de la forme ci-dessus dont la valeur  $m(u, v; \omega)$  ne dépend que de propriétés "locales" de  $\omega$  autour de  $u$  et  $v$  et ne dépend pas d'un ou plusieurs sommets spécifiques est toujours un transport de masse.

## 4 Autour du paramètre critique

Lorsque  $\omega$  est une percolation 0-Bernoulli sur  $X$ ,  $E(\omega)$  est vide p.s. L'évènement  $\{N(\omega) = 0\}$  est donc clairement de probabilité 1. À l'inverse, si  $\omega$  est une percolation 1-Bernoulli sur  $X$ ,  $E(\omega) = E(X)$  p.s., et comme  $X$  est connexe,  $\omega$  est connexe et  $\mathbb{P}(N(\omega) = 1) = 1$ . On peut s'attendre à ce que la probabilité que  $N(\omega)$  soit non nul augmente lorsque  $p$  augmente ; nous allons voir que c'est en effet le cas, et un paramètre va nous intéresser :

**Définition 4.1.** Le *paramètre critique pour la percolation de Bernoulli sur  $X$*  est le réel  $p_c$  compris dans l'intervalle  $[0, 1]$  défini par :

$$p_c := \inf\{p \in [0, 1] \mid \text{soit } \omega \text{ une percolation } p\text{-Bernoulli sur } X, \mathbb{P}(N(\omega) > 0) > 0\}.$$

Pour étudier la probabilité de  $N(\omega)$  en fonction de  $p$ , commençons par introduire des outils qui nous serviront beaucoup.

### 4.1 Couplage croissant et inégalité FKG

Une partie  $F \subset S(X)$  est dite *croissante* si quel que soit  $Y \in S(X)$ , pour tout  $Y' \in S(X)$  tel que  $E(Y) \subset E(Y')$ ,  $Y' \in F$ .

Soit  $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$  deux paramètres.

**Définition 4.2.** On appelle *couplage croissant de paramètres  $p_1$  et  $p_2$*  le couple aléatoire  $(\omega_1, \omega_2)$  de percolations sur  $X$  obtenu comme suit :

- $(u_e)_{e \in E(X)}$  est une famille i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
- $(x_e^i)_{e \in E(X)}$  est une famille i.i.d. de variables aléatoires obtenue en posant pour tout  $e \in E(X)$ ,  $x_e^i := \mathbf{1}_{u(e) < p_i}$  pour  $i=1,2$ .
- $\omega_i$  est une percolation de modèle  $(x^i)$  pour  $i = 1, 2$ .

Soit  $(\omega_1, \omega_2)$  un couplage croissant pour  $p_1$  et  $p_2$ . On remarquera tout d'abord que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux percolations respectivement  $p_1$ -Bernoulli et  $p_2$ -Bernoulli. Mais contrairement au cas où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont indépendantes, pour toute arête  $e$  de  $X$ ,  $e$  est ouverte dans  $\omega_1$

et  $\omega_2$  avec probabilité  $p_1$ , ouverte uniquement dans  $p_2$  avec probabilité  $p_2 - p_1$  et fermée dans les deux avec probabilité  $1 - p_2$ . On a donc  $\mathbf{E}(\omega_1) \subset \mathbf{E}(\omega_2)$ .

Ceci permet immédiatement de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 4.3.** *Si  $F \subset S(X)$  est une partie mesurable croissante,  $(\omega_1, \omega_2)$  un couplage croissant,  $\mathbb{P}(\omega_1 \in F) \leq \mathbb{P}(\omega_2 \in F)$ .*

*Démonstration.* Par définition d'une partie croissante et du couplage croissant,  $\{\omega_1 \in F\} \subset \{\omega_2 \in F\}$ .  $\square$

Or  $\{Y \in S(X) \mid N(Y) > 0\}$  est croissant : pour tout sommet  $v$  de  $X$ , et tous  $Y, Y' \in S(X)$  avec  $\mathbf{E}(Y) \subset \mathbf{E}(Y')$ , la composante connexe de  $v$  dans  $Y$  est incluse dans la composante connexe de  $v$  dans  $Y'$ . Ainsi pour  $p$  dans  $[0, 1]$ , la probabilité qu'une percolation  $p$ -Bernoulli vérifie  $N(\omega) > 0$  croît avec  $p$ . On parlera par abus de langage d'un évènement  $E$  croissant quand  $E$  peut s'écrire sous la forme  $\{\omega \in F\}$  avec  $F$  une partie croissante.

Il est à noter que si  $X$  est un graphe de Cayley d'un groupe  $G$ ,  $(u_e)$  est invariant par l'action de  $G$  et donc  $(\omega_1, \omega_2)$  est  $G$ -invariant, ce qui signifie qu'on peut y appliquer le principe du transport de masse.

L'égalité suivante décrit le fait que deux évènements croissants sont positivement corrélés : l'occurrence d'un évènement croissant nous informe que certaines arêtes sont ouvertes, ce qui augmente la probabilité d'un autre évènement croissant. Par exemple, si  $K(o)$  est infinie, il est plus probable que  $K(u)$  soit infinie où  $u$  est un autre sommet puisqu'il suffit qu'il existe un chemin ouvert entre  $o$  et  $u$ , et que l'on sait qu'il existe au moins une arête ouverte issue de  $o$ .

**Théorème 4.4** (Inégalité FKG, [FKG71]). *Soit  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$ . Si  $A, B$  sont deux parties croissantes mesurables de  $S(X)$ ,*

$$\mathbb{P}(\omega \in A \cap B) \geq \mathbb{P}(\omega \in A)\mathbb{P}(\omega \in B).$$

Pour prouver ce théorème, il est utile de prouver le résultat plus général qui suit. On munit  $S(X)$  de l'ordre induit par l'inclusion des ensemble d'arêtes, c'est à dire  $Y \leq Y' \iff \mathbf{E}(Y) \subset \mathbf{E}(Y')$ .

**Théorème 4.5** ([FKG71]). *Soit  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$ . Soient  $f, g$  deux fonctions croissantes de  $S(X)$  dans  $[0, 1]$ . Alors*

$$\mathbb{E}(f(\omega)g(\omega)) \geq \mathbb{E}(f(\omega))\mathbb{E}(g(\omega)).$$

*Démonstration.* Commençons par montrer par récurrence l'inégalité dans le cas où  $f$  et  $g$  ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes.

Supposons que  $f$  et  $g$  ne dépendent que d'une unique arête  $e_1$ . Pour toute fonction  $h$  de  $S(X)$  ne dépendant de  $e_1$ , on note  $h(e_1)$ , respectivement  $h(\neg e_1)$ , l'image d'un  $Y \in S(X)$  tel que  $e_1 \in \mathbf{E}(Y)$ , respectivement  $e_1 \notin \mathbf{E}(Y)$  et on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\omega)g(\omega)) - \mathbb{E}(f(\omega))\mathbb{E}(g(\omega)) &= pf(e_1)g(e_1) + (1-p)f(\neg e_1)g(\neg e_1) \\ &\quad - (pf(e_1) + (1-p)f(\neg e_1))(pg(e_1) + (1-p)g(\neg e_1)) \\ &= p(1-p)(f(e_1)g(e_1) + f(\neg e_1)g(\neg e_1) - f(\neg e_1)g(e_1) - f(e_1)g(\neg e_1)) \\ &= p(1-p)(f(e_1) - f(\neg e_1))(g(e_1) - g(\neg e_1)) \geq 0 \end{aligned}$$

par monotonie de  $f$  et  $g$ .

À présent supposons que si  $f$  et  $g$  dépendent uniquement du même ensemble d'arêtes de cardinal inférieur ou égal à  $n - 1$ , l'inégalité est vérifiée. Si  $f$  et  $g$  ne dépendent que des arêtes  $e_1, \dots, e_n$ , on note  $\mathcal{F}_k$  la tribu des évènements ne dépendant que de  $e_1, \dots, e_k$  et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\omega)g(\omega)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(\omega)g(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{S \subset \{1, \dots, n-1\}} \mathbb{1}_{E_S} \mathbb{E}(f(\omega)g(\omega) \mid E_S) \right) \\ &\geq \mathbb{E} \left( \sum_{S \subset \{1, \dots, n-1\}} \mathbb{1}_{E_S} \mathbb{E}(f(\omega) \mid E_S) \mathbb{E}(g(\omega) \mid E_S) \right) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mathbb{E}(g(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})) \end{aligned}$$

(où  $E_S$  est l'évènement  $\{\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, e_i \in \mathbb{E}(\omega) \iff i \in S\}$ ) puisque sous  $\mathbb{P}(\cdot \mid E_S)$   $g$  et  $f$  ne dépendent que d'une arête,  $e_n$ , et sont toujours croissantes, et par ce que l'on a démontré plus haut.

Ensuite, par l'hypothèse de récurrence, puisque  $\mathbb{E}(f(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})$  et  $\mathbb{E}(g(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})$  sont croissantes et ne dépendent que de  $n - 1$  arêtes, on a :

$$\mathbb{E}(f(\omega)g(\omega)) \geq \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})) \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1})) = \mathbb{E}(f(\omega)) \mathbb{E}(g(\omega)).$$

Supposons maintenant que  $f$  ou  $g$  ne dépendent pas d'un nombre fini d'arêtes. Puisque  $X$  est un graphe de Cayley,  $\mathbb{E}(X)$  est dénombrable et on peut numéroter les arêtes  $e_1, e_2, \dots$ . Notons, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $f_n(\omega) := \mathbb{E}(f(\omega) \mid \mathcal{F}_n)$  et  $g_n(\omega) := \mathbb{E}(g(\omega) \mid \mathcal{F}_n)$  où  $\mathcal{F}_n$ , comme précédemment, est la tribu des évènements ne dépendant que de  $e_1, \dots, e_n$ . Les suites  $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  sont des martingales convergeant vers  $f(\omega)$  et  $g(\omega)$  dans  $L^2$  et presque sûrement pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puisque toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans  $[0, 1]$ .

On a ensuite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|f_n(\omega)g_n(\omega) - f(\omega)g(\omega)|) &= \mathbb{E}(|(f_n(\omega) - f(\omega))g_n(\omega) + f(\omega)(g_n(\omega) - g(\omega))|) \\ &\leq \mathbb{E}(|(f_n(\omega) - f(\omega))g_n(\omega)| + |f(\omega)(g_n(\omega) - g(\omega))|) \\ &\leq \mathbb{E}(|(f_n(\omega) - f(\omega))g_n(\omega)|) + \mathbb{E}(|f(\omega)(g_n(\omega) - g(\omega))|). \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, cette somme tend vers 0 puisque chacun de ces deux termes tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini : en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2$ , on trouve en effet

$$\mathbb{E}(|(f_n(\omega) - f(\omega))g_n(\omega)|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((f_n(\omega) - f(\omega))^2) \mathbb{E}(g_n(\omega)^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\mathbb{E}(|f(\omega)(g_n(\omega) - g(\omega))|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(f(\omega)^2) \mathbb{E}((g_n(\omega) - g(\omega))^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent si l'inégalité FKG n'était pas vérifiée, il existerait un rang  $n$  à partir duquel  $\mathbb{E}(f_n(\omega)g_n(\omega))$  serait inférieur à  $\mathbb{E}(f_n(\omega))\mathbb{E}(g_n(\omega))$ . Mais  $f_n$  et  $g_n$  dépendent des mêmes  $n$  arêtes, donc par ce qu'on a vu plus haut l'inégalité FKG s'applique à elles, et c'est absurde. On en déduit le résultat.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.4.* Il suffit d'appliquer le le théorème 4.5 aux indicatrices de  $\{\omega \in A\}$  et  $\{\omega \in B\}$ . Elles sont croissantes puisque par définition d'une partie croissante, si  $Y \in A$ ,  $Y \leq Y'$ , alors  $Y' \in A$ .  $\square$

## 4.2 Ergodicité de la percolation de Bernoulli

Soit  $\Gamma$  un groupe qui agit sur un graphe  $X$ , et soit  $\omega$  une percolation sur  $X$ . Une partie  $F \subset S(X)$  est dite *invariante par l'action de  $\Gamma$*  si pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ ,  $\gamma \cdot F = F$ . La percolation  $\omega$  est *ergodique pour l'action de  $\Gamma$*  si la probabilité pour  $\omega$  d'appartenir à toute partie mesurable invariante par l'action de  $\Gamma$  est de probabilité 0 ou 1.

**Théorème 4.6** ([Dum18]). *Soit  $X$  un graphe infini,  $\Gamma$  un groupe qui agit par automorphisme sommet-transitivement sur  $X$  et  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur  $X$ . La percolation  $\omega$  est ergodique par l'action de  $\Gamma$ .*

Commençons par un résultat intermédiaire; on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des évènements cylindriques, c'est à dire l'ensemble des unions finies d'évènements de la forme  $\bigcap_{e \in E_0} \{x_e = 0\} \cap \bigcap_{e \in E_1} \{x_e = 1\}$  où  $E_0$  et  $E_1$  sont deux parties finies de  $E(X)$ ,  $\mathcal{C}$  est stable par union finie, intersection finie et passage au complémentaire et on a  $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C})$ .

**Lemme 4.7.** *Soit  $A$  un évènement de  $\mathcal{C}$  la tribu cylindrique et  $\epsilon > 0$ . Il existe  $A' \in \mathcal{C}$  tel que  $\mathbb{P}(A \Delta A') \leq \epsilon$ .*

*Démonstration.* La tribu  $\mathcal{C}$  étant engendrée par  $\mathcal{C}$ , il suffit de montrer que l'ensemble  $\mathcal{W} := \{A \in \mathcal{C} \mid \forall \epsilon > 0, \exists A' \in \mathcal{C}, \mathbb{P}(A \Delta A') \leq \epsilon\}$  est une tribu qui contient  $\mathcal{C}$ .

Il est clair que  $\mathcal{W}$  contient  $\mathcal{C}$  et en particulier  $\Omega$ , et puisque pour  $A \in \mathcal{W}$ ,  $A' \in \mathcal{C}$ ,  $\mathbb{P}(A \Delta A') = \mathbb{P}(A^c \Delta A'^c)$ ,  $\mathcal{W}$  est stable par passage au complémentaire.

Pour montrer que  $\mathcal{W}$  est stable par union dénombrable, commençons par montrer qu'elle est stable par union finie. Il suffit pour cela de montrer qu'elle est stable par union de deux éléments. Soit donc  $\epsilon > 0$ ,  $A, B \in \mathcal{W}$ , choisissons  $A', B' \in \mathcal{C}$  tels que  $\mathbb{P}(A \Delta A') \leq \epsilon/2$ ,  $\mathbb{P}(B \Delta B') \leq \epsilon/2$ . Puisque  $(A \cup B) \Delta (A' \cup B') \subset (A \Delta A') \cup (B \Delta B')$ ,  $\mathbb{P}((A \cup B) \Delta (A' \cup B')) \leq \epsilon$  et  $A \cup B$  est donc bien dans  $\mathcal{W}$ . À présent, soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable d'évènements de  $\mathcal{C}$ . On peut sans perte de généralité considérer l'union des  $A_n$  comme une union disjointe : quitte à poser, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n := A_n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i < n} A_i$ , on a bien  $B_n \in \mathcal{W}$  par ce qui précède, et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \leq 1$ , et quel que soit  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que le reste  $R_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq N} B_n$  soit de probabilité inférieure à  $\epsilon/2$ . On peut aussi trouver  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $\mathbb{P}(C \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n < N} B_n) \leq \epsilon/2$ , et

$$\mathbb{P} \left( C \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \mathbb{P} \left( \left( C \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n < N} B_n \right) \cup R_n \right) \leq \epsilon.$$

Ainsi  $\mathcal{W}$  est une tribu qui contient  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{W} = \mathcal{C}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.6.* Soit  $F$  une partie mesurable de  $S(X)$  invariante par l'action de  $\Gamma$  et  $A$  l'évènement " $\omega \in F$ ". Pour montrer que la probabilité de  $A$  est soit 0, soit 1, nous allons montrer que  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A)^2$ .

D'après le lemme 4.7, on peut approcher  $A$  avec précision  $\epsilon > 0$  quelconque par un évènement cylindrique  $B$ . Comme  $B$  n'est déterminé que par un nombre fini d'arêtes et  $\Gamma$  agit sommet-transitivement, il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $B$  et  $\gamma \cdot B$  soient déterminés par des ensembles disjoints d'arêtes, et on a alors (par indépendance) :

$$\mathbb{P}(B \cap \gamma \cdot B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\gamma \cdot B) = \mathbb{P}(B)^2.$$

On en déduit en utilisant l'invariance par action de  $\gamma$  de  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \gamma \cdot A) \\ &\leq \mathbb{P}(A \cap (\gamma \cdot A) \cap B \cap (\gamma \cdot B)) + \mathbb{P}((A \cap \gamma \cdot A) \Delta (B \cap \gamma \cdot B)) \\ &\leq \mathbb{P}(B \cap \gamma \cdot B) + \mathbb{P}((A \Delta B) \cup (\gamma \cdot A \Delta \gamma \cdot B)) \\ &\leq \mathbb{P}(B \cap \gamma \cdot B) + 2\epsilon = \mathbb{P}(B)^2 + 2\epsilon \\ &\leq (\mathbb{P}(A) + \epsilon)^2 + 2\epsilon \leq \mathbb{P}(A)^2 + 4\epsilon + \epsilon^2. \end{aligned}$$

Ainsi en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on a  $\mathbb{P}(A)^2 \geq \mathbb{P}(A)$  et donc  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .  $\square$

En particulier, pour un graphe de Cayley de  $G$ , la percolation de Bernoulli est ergodique pour l'action de  $G$ .

### 4.3 Probabilité de l'évènement " $N(\omega) > 0$ " pour $p \neq p_c$

Tout cela introduit, nous pouvons affirmer les choses suivantes sur une percolation  $p$ -Bernoulli sur un graphe infini sommet-transitif  $X$  : comme la partie de  $S(X)$  des sous graphes ayant une composante connexe infinie est croissante, la probabilité que  $N(\omega) = 0$  vaut 0 si  $p < p_c$  et est strictement positive si  $p > p_c$ , et comme " $N(\omega) > 0$ " est invariant par l'action d'un automorphisme de  $X$ , par ergodicité, " $N(\omega) > 0$ " est de probabilité 1 si  $p > p_c$ .

On peut se demander quelles sont les valeurs possibles de  $p_c$  ; nous verrons par la suite que  $p_c = 1$  est possible (par exemple dans le cas du graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}$  muni des générateurs 1 et  $-1$ ), en revanche  $p_c$  ne peut pas valoir 0 si  $X$  est régulier. On peut même donner un minorant de  $p_c$  dans ce cas :  $p_c \geq 1/(d-1)$  où  $d$  est le degré d'un sommet de  $X$ .

**Proposition 4.8.** *Soit  $X$  un graphe régulier de degré  $d > 1$ . Pour  $p < 1/(d-1)$ , la percolation  $p$ -Bernoulli sur  $X$  n'admet presque sûrement aucune composante connexe infinie.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur  $X$ . Notons  $C_1, \dots, C_r$  les chaînes élémentaires (c'est à dire ne contenant pas deux fois la même arête) de longueur  $n$  partant de  $v$ . Par régularité, on a  $r \leq d(d-1)^{n-1}$ . On note  $E_i^n$  l'évènement "toutes les arêtes de la chaîne  $C_i$  sont ouvertes dans  $\omega$ " pour  $1 \leq i \leq r$ , on s'intéresse à l'évènement  $E^n := \bigcup_{1 \leq i \leq r} E_i^n$ , et on a :

$$\mathbb{P}(E^n) \leq \sum_{1 \leq i \leq r} \mathbb{P}(E_i^n) = \sum_{1 \leq i \leq r} p^n \leq d(d-1)^{n-1} \times p^n.$$

Si  $E^n$  n'est pas réalisé, alors  $K(v)$  est fini, étant alors incluse dans  $B_X(v, n)$  la boule fermée de centre  $v$  et de rayon  $n$  pour la distance sur  $X$ . Par conséquent  $\{K(v) \text{ infinie}\} \subset$

$E^n$ , et donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(K(v) \text{ infinie}) \leq d(d-1)^{n-1}p^n$ . Comme  $p(d-1) < 1$ , la probabilité que  $K(v)$  soit infinie est donc 0, et  $N(\omega) = 0$  p.s.  $\square$

**Corollaire 4.9.** *Soit  $T$  l'arbre régulier de degré  $d > 2$ . Son paramètre critique pour la percolation de Bernoulli  $p_c$  est égal à  $1/(d-1)$ .*

*Démonstration.* La proposition précédente nous dit que  $p_c$  est supérieur ou égal à  $1/(d-1)$ . De plus, si au paramètre  $p$  il existe un chemin infini issu de  $o$  avec probabilité positive, alors  $N(\omega) > 0$ . Mais  $K(o)$  a la même structure que le graphe d'un processus de branchement : partant de  $o$ , on a  $d$  potentiels "enfants", chacun né avec probabilité  $p$ , et chacun de ces enfants et leurs descendants a  $d-1$  enfants chacun né avec probabilité  $p$ . Par conséquent puisqu'à partir de la deuxième génération l'espérance du nombre d'enfants d'un individu est  $(d-1)p$ , si  $p > 1/d$ , la probabilité d'extinction n'est pas 1 et donc une percolation  $p$ -Bernoulli sur  $T$  admet avec probabilité non nulle et donc 1 une composante connexe infinie. Ainsi  $p_c \leq 1/(d-1)$ , et donc  $p_c = 1/(d-1)$ .  $\square$

## 5 $N(\omega)$ au paramètre critique

Dans cette section, on se fixe un graphe de Cayley  $X$  de  $G$ , et  $\omega$  est une percolation de Bernoulli de  $X$  de paramètre critique. Nous allons montrer en utilisant la preuve introduite dans [Ben+99] que  $N(\omega) = 0$  p.s. si  $X$  est non moyennable.

Tout d'abord,  $N(\omega) = N(g \cdot \omega)$  pour tout  $g$  dans  $G$ , puisqu'on l'a vu l'action de  $G$  préserve la cardinalité des composantes connexes : pour  $v$  dans  $\mathbf{V}$ ,  $|K(g \cdot v)| = |g \cdot K(v)| = |K(v)|$ . Par conséquent l'évènement " $N(\omega) = n$ " est invariant par action de  $G$  pour tout  $n$  dans  $\overline{\mathbb{N}}$ . Ainsi par ergodicité, il existe un  $n$  dans  $\overline{\mathbb{N}}$  tel  $N(\omega) = n$  presque sûrement.

### 5.1 $N(\omega)$ n'est pas fini strictement supérieur à 1

Commençons par deux propriétés très utiles de la percolation de Bernoulli. Soit  $X$  un graphe et  $e$  une de ses arêtes. Si  $\mathcal{A}$  est une partie mesurable de  $S(X)$ , on note  $\Pi_e \mathcal{A} := \{A \in S(X) \mid \exists B \in \mathcal{A}, E(A) = E(B) \cup \{e\}\}$  et  $\Pi_{-e} \mathcal{A} := \{A \in S(X) \mid \exists B \in \mathcal{A}, E(A) = E(B) \setminus \{e\}\}$ . On fera parfois l'abus de notation d'écrire  $\Pi_e E$  quand  $E$  est de la forme  $\{\omega \in \mathcal{A}\}$  pour  $\{\omega \in \Pi_e \mathcal{A}\}$ .

On dit qu'une percolation  $\omega$  sur un graphe  $X$  est *tolérante à l'insertion* (respectivement *tolérante à la suppression*) si pour toute partie mesurable  $\mathcal{A}$  de  $S(X)$  et toute arête  $e$  de  $X$ ,  $\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}) > 0 \implies \mathbb{P}(\omega \in \Pi_e \mathcal{A}) > 0$  (respectivement  $\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}) > 0 \implies \mathbb{P}(\omega \in \Pi_{-e} \mathcal{A}) > 0$ ).

**Lemme 5.1.** *Soit  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur un graphe  $X$ . Si  $p > 0$ ,  $\omega$  est tolérante à l'insertion ; si  $p < 1$ ,  $\omega$  est tolérante à la suppression.*

*Démonstration.* Supposons  $p > 0$  et soit  $e$  une arête. Si  $\mathcal{A}$  est une partie de  $S(X)$  telle que  $\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}) > 0$ , notons  $\mathcal{A}' \subset S(X)$  l'ensemble des sous-graphes  $Y'$  de  $X$  qui ne diffèrent d'un graphe  $Y$  de  $X$  que d'au plus l'arête  $e$ , c'est à dire vérifiant  $E(Y) \Delta E(Y') \subset \{\emptyset, \{e\}\}$ . Il est clair que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  et donc  $\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}') > 0$ . De plus par construction, l'appartenance à  $\mathcal{A}'$  ne dépend que des arêtes autres que  $e$ , et donc (comme  $\omega$  est une percolation de

Bernoulli),  $\{\omega \in \mathcal{A}'\}$  est indépendant de  $\{e \in E(\omega)\}$ . Donc  $\mathbb{P}(\omega \in \Pi_e \mathcal{A}) = \mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}', e \in E(\omega)) = p\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}') > 0$ .

La preuve est similaire pour la tolérance à la suppression.  $\square$

Notons que si  $0 < p < 1$ , par le même raisonnement :

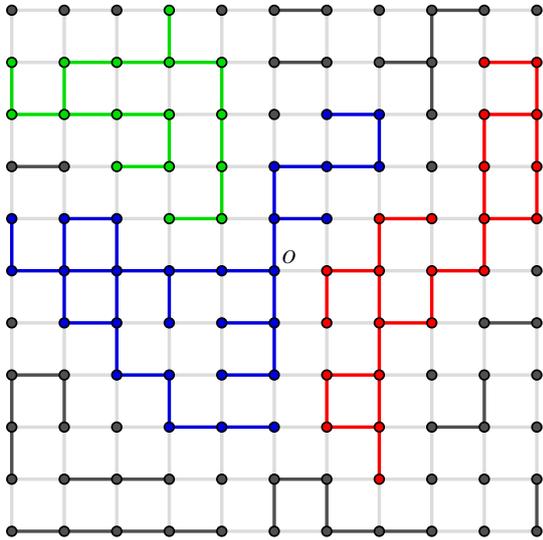
$$\mathbb{P}(\omega \in \Pi_{-e} \mathcal{A}) = (1 - p)\mathbb{P}(\omega \in \mathcal{A}') = \frac{1 - p}{p}\mathbb{P}(\omega \in \Pi_e \mathcal{A}). \quad (5.1)$$

Ainsi le rapport entre les probabilités de deux évènements ne différant que sur une arête est borné par un facteur ne dépendant que de  $p$ .

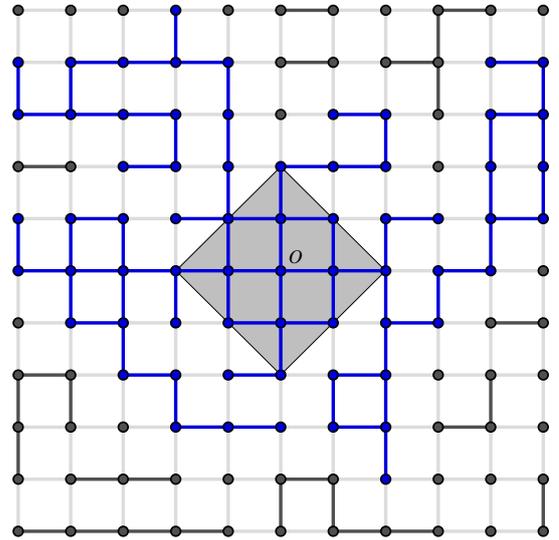
Bien entendu, quitte à appliquer le lemme plusieurs fois, on peut insérer ou supprimer un nombre fini quelconque d'arêtes. De plus, les résultats énoncés par la suite étant tous triviaux dans le cas où le paramètre vaut 0 ou 1, on ne le précisera pas à chaque fois. C'est le cas par exemple pour le résultat qui suit.

**Proposition 5.2.** *Soit  $X$  un graphe sommet-transitif infini localement fini et  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur  $X$ . Presque sûrement  $N(\omega) \leq 1$  ou  $N(\omega) = \infty$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $1 < n < \infty$  tel que  $N(\omega) = n$  p.s. Pour tout entier  $k$ , sur l'évènement "il existe  $u_1, u_2 \in B_X(o, k)$  tels que  $|K(u_1)| = |K(u_2)| = \infty$ ,  $K(u_1) \neq K(u_2)$ " où  $B_X(o, k)$  désigne la boule ouverte centrée en  $o$  de rayon  $k$  pour la distance sur  $X$ , il suffit d'ouvrir toutes les arêtes de la boule  $B_X(o, k)$  pour se placer sur l'évènement  $N(\omega) < n$ , qui est de probabilité nulle, comme illustré dans la figure 3. On peut donc appliquer le lemme 5.1 et p.s., pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , au plus une composante connexe infinie de  $\omega$  a un sommet dans  $B_X(o, n)$ , et donc  $N(\omega) \leq 1$  p.s., ce qui est absurde.  $\square$



(a) Il y a trois composantes connexes infinies qui intersectent  $B_X(o, 3)$ .



(b) Après avoir ouvert toutes les arêtes de  $B_X(o, 3)$ , on a réduit  $N(\omega)$  de 2.

FIGURE 3 – En modifiant un nombre fini d'arêtes on réduit le nombre de composantes connexes infinies.

## 5.2 $N(\omega)$ ne vaut pas 1

Commençons par des résultat préliminaire :

**Théorème 5.3.** *Soit  $\omega$  une percolation sur un graphe de Cayley  $X$  d'un groupe  $G$   $G$ -invariante. Si  $\mathbb{E}(\deg_\omega(o)) > \alpha(X)$ , alors  $N(\omega) > 0$  avec probabilité non nulle.*

*Démonstration.* Définissons le transport de masse suivant :

$$m(v, u; \omega) = \begin{cases} \deg_\omega(v)/|K(v)| & \text{si } K(v) \text{ est finie et } u \in K(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $K(g \cdot v) = g \cdot K(v)$  et comme le degré est invariant par l'action de  $g$  d'après ((3.1)), pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $m$  est bien un transport de masse.

Soit  $v \in \mathbb{V}$ . On a :

$$\sum_{u \in \mathbb{V}} m(v, u; \omega) = \begin{cases} \deg_\omega(v) & \text{si } K(v) \text{ est finie,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc en particulier  $\sum_{u \in \mathbb{V}} M(o, u) = \mathbb{E}(\deg_\omega(o))$  si  $N(\omega) = 0$  p.s.

On écrit  $\alpha_{K(v)}$  pour  $\alpha_Y$  où  $Y$  est le sous-graphe de  $X$  engendré par  $K(v)$  et on a :

$$\sum_{u \in \mathbb{V}} m(u, v; \omega) = \begin{cases} \frac{1}{|K(v)|} \sum_{u \in K(v)} \deg_{K(v)}(u) = \alpha_{K(v)} & \text{si } K(v) \text{ est finie,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc en particulier  $\sum_{u \in \mathbb{V}} M(u, o) = \mathbb{E}(\alpha_{K(o)})$  si  $N(\omega) = 0$  p.s.

Donc par le principe du transport de masse, si  $N(\omega) = 0$  p.s., on a  $\mathbb{E}(\alpha_{K(o)}) = \mathbb{E}(\deg_\omega(o))$ . Or par définition,  $\alpha(X) \geq \alpha_{K(o)}$  et donc  $\alpha(X) \geq \mathbb{E}(\deg_\omega(o))$ . Par contraposée, on obtient le théorème.  $\square$

**Corollaire 5.4.** *Si pour toute  $e \in \mathbb{E}(X)$  on a  $\mathbb{P}(e \notin \mathbb{E}(\omega)) < \iota_{\mathbb{E}}(X)/\deg_X(o)$ , alors  $N(\omega) > 0$  avec probabilité non nulle.*

*Démonstration.* On a :

$$\mathbb{E}(\deg_\omega(o)) = \mathbb{E} \left( \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{[o,v] \in \mathbb{E}(\omega)} \right) > \deg_X(o)(1 - \iota_{\mathbb{E}}(X)/\deg_X(o)) = \deg_X(o) - \iota_{\mathbb{E}}(X)$$

Donc par la proposition 2.4, on a  $\mathbb{E}(\deg_\omega(o)) > \alpha(X)$  et on conclut par le théorème 5.3.  $\square$

Il est à noter que ni dans le théorème ni dans son corollaire on a supposé  $X$  non moyennable. Cependant si  $X$  est moyennable l'hypothèse  $\mathbb{E}(\deg_\omega(o)) > \alpha(X)$  n'est jamais vérifiée puisque  $\deg_X(o) = \alpha(X)$  d'après la proposition 2.4, et l'hypothèse du corollaire non plus car  $\iota_{\mathbb{E}}(X) = 0$ .

Ce corollaire va nous permettre de prouver le résultat qu'on voulait :

**Proposition 5.5.** *Soit  $\omega$  une percolation  $p_c$ -Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$  non moyennable. La probabilité que  $N(\omega) = 1$  est nulle.*

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma_\epsilon$  une percolation  $\epsilon$ -Bernoulli sur  $X$  indépendante de  $\omega$  et  $\omega_\epsilon$  la percolation sur  $X$  dont les arêtes sont l'ensemble  $\mathbf{E}(\omega) \setminus \mathbf{E}(\gamma_\epsilon)$ . Il s'agit donc d'une percolation  $(1 - \epsilon)p_c$ -Bernoulli sur  $X$ . Supposons que  $N(\omega) = 1$  et notons  $U$  l'unique composante connexe de  $\omega$ . Nous allons construire une percolation  $\xi_\epsilon$  sur  $X$  à partir de  $\omega_\epsilon$  et  $\omega$  comme suit : pour tout sommet  $v$  de  $X$ , on note  $U(v)$  l'ensemble des sommets  $u$  de  $U$  qui vérifient  $d_X(u, v) = d_X(U, v)$  et pour toute arête  $[v, w] \in \mathbf{E}(\omega)$ ,  $[v, w]$  est ouverte dans  $\xi_\epsilon$  si et seulement si :

- $d_X(v, U) < 1/\epsilon$  et  $d_X(w, U) < 1/\epsilon$  et
- $U(v)$  et  $U(w)$  sont inclus dans une même composante connexe de  $\omega_\epsilon$ .

Pour  $[v, w] \in \mathbf{E}(X)$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}([v, w] \notin \xi_\epsilon \mid \omega) = 0.$$

En effet, pour  $\epsilon$  assez petit la deuxième condition sera vérifiée. De plus, comme  $X$  est régulier de degré fini,  $U(v) \cup U(w) := \{u_1, \dots, u_n\}$  est fini. Soit  $C_k$  une chaîne de longueur minimale entre  $u_k$  et  $u_{k+1}$  incluse dans  $U$  pour  $1 \leq k \leq n - 1$ . L'ensemble des arêtes qui composent les  $C_k$  est fini, et une arête entre deux éléments de  $U$  est ouverte dans  $\xi_\epsilon$  ssi elle est ouverte dans  $\omega_\epsilon$ , donc la probabilité qu'au moins une de ces arêtes n'est pas dans  $\omega_\epsilon$  tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0. Or si toutes ces arêtes sont dans  $\omega_\epsilon$ , la deuxième condition est vérifiée.

En intégrant, on a de plus :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}([v, w] \notin \xi_\epsilon) = 0$$

Comme la percolation  $\omega$  est  $G$ -invariante, la vitesse de convergence ne dépend pas de l'arête  $[v, w]$  choisie, et on a donc convergence uniforme. Comme de plus  $X$  est non moyennable on peut appliquer le corollaire 5.4 pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

Prenons donc  $\epsilon > 0$  tel que  $\xi_\epsilon$  admet une composante connexe infinie avec probabilité non nulle, plaçons nous dans l'évènement ou elle en a une, et notons la  $T$ . Pour tout sommet  $u$  de  $U$ , l'ensemble des sommets  $x$  de  $\xi_\epsilon$  vérifiant  $d_X(x, U) = d_X(x, u)$  est fini ; moins de  $\deg_X(u)$  sommets sont à distance 1 de  $u$ , et donc moins de  $\sum_{i=0}^{1/\epsilon} \deg_X(u)^i$  sont à une distance inférieure à  $1/\epsilon$  de  $u$ . Il existe donc un ensemble infini  $U'$  inclus dans  $U$  tel que pour tout  $u \in U'$ , il existe  $t \in T$  tel que  $u \in U(t)$ . Soit  $u, u' \in U'$  et soient  $t, t'$  de tels sommets. Il existe une chaîne d'arêtes  $[t = t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m = t']$  entre  $t$  et  $t'$  incluse dans  $T$ . Par construction de  $\xi_\epsilon$ , pour  $0 \leq i \leq m - 1$ ,  $U(t_i)$  et  $U(t_{i+1})$  sont inclus dans la même composante connexe de  $\omega \setminus \gamma_\epsilon$ , de même donc que  $U(t)$  et  $U(t')$ , et ainsi  $u$  et  $u'$  sont dans la même composante connexe de  $\omega_\epsilon$  qui est par conséquent infinie.

Mais  $\omega_\epsilon$  étant une percolation de Bernoulli de paramètre inférieur au paramètre critique, elle n'admet presque sûrement aucune composante connexe infinie, et donc l'évènement  $N(\omega) = 1$  est de probabilité nulle.  $\square$

### 5.3 $N(\omega)$ n'est pas infini

**Proposition 5.6.** *Soit  $\omega$  une percolation  $p_c$ -Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$ . La probabilité que  $N(\omega) = \infty$  est nulle.*

*Démonstration.* Supposons que  $N(\omega) = \infty$  p.s. Alors  $\omega$  admet p.s. un nombre strictement positif de points de rencontre (voir définition 3.2). En effet il existe un entier  $k$  tel qu'au

moins trois composantes connexes infinies admettent chacune un sommet dans  $B_X(o, k)$  avec probabilité non nulle. Or en ouvrant toutes les arêtes de  $B_X(o, k)$  sauf trois chaînes entre un sommet et trois composantes connexes qui admettent un sommet sur la frontière de la boule, ce sommet devient un point de rencontre. Par le lemme 5.1, il existe un point de rencontre dans la boule  $B_X(o, k)$  avec probabilité non nulle, et donc  $o$  est point de rencontre avec probabilité non nulle. De plus l'évènement " $\omega$  admet un point de rencontre" est invariant par l'action de  $G$ , donc par ergodicité  $\omega$  admet presque sûrement un point de rencontre.

On note ici  $Y \subset V$  l'ensemble des points de rencontre de  $\omega$ . Nous allons à présent construire une forêt  $\xi$  sur  $Y$  qui n'est en général pas un sous-graphe de  $X$ .

On introduit  $(y_v)_{v \in V}$  une famille de variables aléatoire i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendantes de  $\omega$ . Pour  $v$  dans  $Y$ , les arêtes de  $\xi$  dont  $v$  est une extrémité sont les  $[v, u]$  tels que :

- il existe une composante connexe infinie  $Z$  du graphe induit sur  $\omega$  par  $V \setminus \{v\}$  dont un des sommets est voisin de  $v$  dans  $\omega$  et qui contient  $u$ ,
- $u$  appartient à  $Y(Z, v) \subset Y \cap Z$  l'ensemble des points de rencontre de  $Z$  qui minimisent la distance sur  $\omega$  avec  $v$ ,
- parmi les éléments de  $Y(Z, v)$ ,  $u$  minimise  $y(u)$ .

Par le lemme 3.3, il existe presque sûrement un unique  $u \in Z$  tel que  $[u, v]$  soit une arête de  $\xi$  pour toute  $Z$  composante connexe du graphe induit par  $\omega$  sur  $V \setminus \{v\}$  dont un des sommets est voisin de  $v$  dans  $\omega$  (on le note  $u(Z, v) := u$ ) et le degré de tout sommet de  $\xi$  est presque sûrement supérieur ou égal à 3. De plus,  $\xi$  est invariant par l'action de  $G$ .

À présent démontrons que  $\xi$  est presque sûrement une forêt. Pour cela on introduit  $\xi'$  le graphe orienté dont les arêtes partant de  $v$  sont les  $(v, u(Z, v))$  pour toutes les composantes connexes infinies  $Z$  du graphe induit sur  $X$  par  $V \setminus \{x\}$ . Nous allons voir que tout cycle de  $\xi$  est aussi un cycle de  $\xi'$ ; puisque si on oublie l'orientation de  $\xi'$ , on retrouve  $\xi$ , il nous suffit donc de montrer que  $\xi'$  n'admet presque sûrement aucun cycle élémentaire (i.e. ne contenant pas deux fois le même sommet à l'exception du premier) de longueur 3 ou plus.

Supposons qu'existe un tel cycle  $C$ . Si  $v$  est un sommet de  $C$ ,  $Z, Z'$  deux composantes connexes infinies différentes voisines de  $v$  dans  $\omega$  du graphe induit par  $\omega$  sur  $V \setminus \{v\}$  telles que  $(v, u(Z, v))$  soit une arête de  $C$ , tous les sommets de  $C$  sont dans  $Z$ ; si ce n'était pas le cas, le cycle ne serait pas élémentaire puisque pour tous  $(y, y') \in Z \times Z'$ ,  $d_\omega(y, y') = d_\omega(y, v) + d_\omega(v, y')$ . Ainsi au plus une des arêtes de  $\xi'$  entre éléments du cycle a pour origine  $v$ , et comme un cycle élémentaire a autant d'arêtes que de sommets, chaque sommet du cycle a une unique arête du cycle dont il est l'origine, et une dont il est l'arrivée. Le cycle  $C$  a donc cette structure :  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{r-1} \rightarrow v_r = v_0$ . Par construction de  $\xi'$ , et puisque les  $v_j$  sont donc dans la même composante connexe du graphe induit par  $V(\omega) \setminus \{v_i\}$ , on a donc  $d_\omega(v_i, v_{i+1}) \geq d_\omega(v_{i-1}, v_i)$  pour  $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  et  $d_\omega(v_{i-1}, v_i) \geq d_\omega(v_{i-1}, v_{i-2}) \geq \dots \geq d_\omega(v_i, v_{i+1})$  donc pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ ,  $d_\omega(v_i, v_{i+1}) = d_\omega(v_j, v_{j+1})$ . Presque sûrement, il existe un unique  $v_i$  qui maximise  $y(v_i)$ . Mais alors par construction de  $\xi'$ ,  $[v_i, v_{i+1}]$  doit être orientée en partant de  $v_i$ , et de même pour  $[v_i, v_{i-1}]$ , dans  $\xi'$ . Or on a vu que la structure de  $C$  était telle que tout sommet du cycle a une unique arête du cycle l'ayant pour début. C'est absurde et on en conclut que  $\xi$  est une forêt.

Soit  $\epsilon > 0$ , on définit comme précédemment une  $\epsilon$ -percolation  $\gamma_\epsilon$  sur  $X$  indépendante de  $\omega$  et  $\omega_\epsilon$  la percolation sur  $X$  dont les arêtes sont  $E(\omega) \setminus E(\gamma_\epsilon)$  qui est donc  $(1 - \epsilon)p_c$ -Bernoulli. Étant une percolation de Bernoulli de paramètre inférieur à  $p_c$ , elle n'admet aucune composante connexe infinie p.s. On définit maintenant la percolation  $\xi_\epsilon$  dont les arêtes sont les arêtes  $[u, v]$  de  $\xi$  telles que  $u$  et  $v$  sont dans la même composante connexe de  $\omega_\epsilon$ . Par construction  $\xi_\epsilon$  est invariante par l'action de  $G$ , et comme ses composantes connexes sont incluses dans celles de  $\omega_\epsilon$ , elles sont toutes finies p.s.

En notant  $L(v)$  la composante connexe de  $v$  dans  $\xi_\epsilon$ , et  $\partial_V L(v)$  sa frontière pour les sommets dans  $\xi$ , on définit le transport de masse suivant :

$$m(v, u; \omega, \xi) := \begin{cases} 1/|\partial_V L(v)| & \text{si } v \in Y \text{ et } u \in \partial_V L(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $v$  dans  $Y$ , par la finitude p.s. de  $L(v)$ , le transport de masse est bien défini et on a :

$$\sum_{u \in V} m(u, v; \omega, \xi) = \begin{cases} |L(v)|/|\partial_V L(v)| & \text{si } v \in \partial_V L(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Par la proposition 2.5, comme  $\xi$  est une forêt,  $2|\partial_V L(v)| \geq |L(v)|$ , et donc par (5.2) nous avons que  $\sum_{u \in V} m(u, v; \omega) \leq 2$  p.s. et que  $\sum_{u \in V} m(u, v; \omega) = 0$  si  $v \notin \partial_V L(v)$ . On a donc  $\sum_{u \in V} M(u, v) \leq 2\mathbb{P}(v \in Y, v \in \partial_V L(v))$ .

Mais on a aussi :

$$\sum_{u \in V} M(v, u) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_Y(v)) = \mathbb{P}(v \in Y)$$

et par le principe du transport de masse – dans une version légèrement plus générale puisque  $\xi$  n'est pas un sous-graphe de  $X$ , mais puisqu'il est invariant par l'action de  $G$ , la preuve est la même – on a

$$\mathbb{P}(v \in Y) \leq 2\mathbb{P}(v \in Y, v \in \partial_V L(v)).$$

Soit  $v \in Y$ , fixons  $\omega$ ,  $\xi$  et soit  $e \in E(\xi)$  une arête incidente à  $v$ . Pour que  $e$  ne soit pas dans  $\xi_\epsilon$ , il faut que les deux extrémités de  $e$  soient dans des composantes connexes de  $\omega_\epsilon$  différentes. Cela signifie que si on choisit un chemin dans  $\omega$  de longueur minimale entre elles, une de ses arêtes doit être dans  $\gamma_\epsilon$  – ce qui est le cas avec probabilité arbitrairement petite quand  $\epsilon$  est arbitrairement petit donc  $\mathbb{P}(e \notin E(\xi_\epsilon) \mid \omega, \xi) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  p.s.

De ce qui précède on déduit que  $\mathbb{P}(v \in Y, v \in \partial_V L(v) \mid \omega, \xi)$  tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0 et par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(v \in Y, v \in \partial_V L(v)) = 0.$$

Le graphe  $\omega$  possède presque sûrement un point de rencontre et par conséquent, pour  $v \in V$ ,  $\mathbb{P}(v \in Y) > 0$ , et  $\mathbb{P}(v \in Y, v \in \partial_V L(v))$  est minorée indépendamment de  $\epsilon$  par une quantité strictement supérieure à 0, ce qui est absurde puisqu'elle tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0.  $\square$

## 6 Unicité ou non des composantes connexes infinies

Jusqu'ici on s'est principalement intéressé à la question de l'existence de composantes connexes infinies. Par ergodicité, et par les arguments avancés dans la section 5.1 on sait que pour un paramètre donné  $p > p_c$ , soit  $\mathbb{P}(N(\omega) = 1) = 1$  soit  $\mathbb{P}(N(\omega) = \infty) = 1$ . On peut donc se poser la question de pour quelles valeurs de  $p$  on a unicité ou une infinité de composantes connexes infinies.

Dans le cas moyennable, la réponse est très simple : quel que soit  $p$ ,  $\mathbb{P}(N(\omega) = \infty) = 0$ .

### 6.1 $N(\omega)$ est presque sûrement fini dans le cas moyennable

**Proposition 6.1** ([BK89]). *Soit  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur un graphe moyennable  $X$ . La probabilité que  $N(\omega) = \infty$  est nulle.*

*Démonstration.* Supposons  $\mathbb{P}(N(\omega) = \infty) = 1$ . Soit  $F$  une partie finie de  $\mathbf{V}$ . On de plus construit les graphes  $\xi$  et  $\xi'$  sur  $Y$  l'ensemble des points de rencontre de  $\omega$  comme dans la preuve de la proposition 5.6, et  $\tau$  la sous-forêt de  $\xi$  induite par  $F \cap Y$ .

Nous allons tout d'abord montrer que presque sûrement :

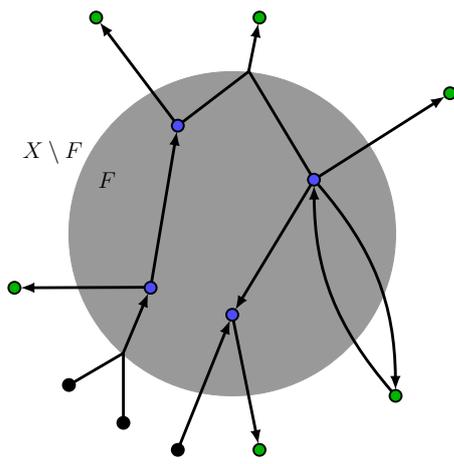
$$4|\partial_{\mathbf{E}}(F)| \geq |F \cap Y|. \quad (6.1)$$

Notons  $d\tau$  l'ensemble des arêtes de  $\xi$  ayant une extrémité dans  $F$  et l'autre en dehors, et pour chaque  $[u, v] \in d\tau$ , choisissons une chaîne de longueur minimale sur  $\omega$  reliant ses extrémités, et une arête de  $\partial_{\mathbf{E}}(F)$  présente dans cette chaîne que l'on note  $e([u, v])$ . De par la définition de  $\xi$ , on pourrait s'attendre à ce que les  $e_{[u, v]}$  soient distinctes deux à deux : on aurait alors par la propriété 2.5 l'inégalité  $2|\partial_{\mathbf{E}}(F)| \geq 2|d\tau| \geq |F \cap Y|$ . Ce n'est en général pas vrai ; en particulier si  $[u_1, v], [u_2, v], \dots, [u_n, v]$  sont des arêtes de  $d\tau$  orientées dans  $\xi'$  vers  $v$ , il est possible que  $e([u_1, v]) = e([u_2, v]) = \dots = e([u_n, v])$ , et si  $(u, v), (v, u') \in \mathbf{E}(\xi')$  pour  $u, u' \in Y \cap F, v \in Y \setminus F$ , il est possible que  $e([u, v]) = e([u', v])$  – ce sont heureusement les seuls types de cas possibles.

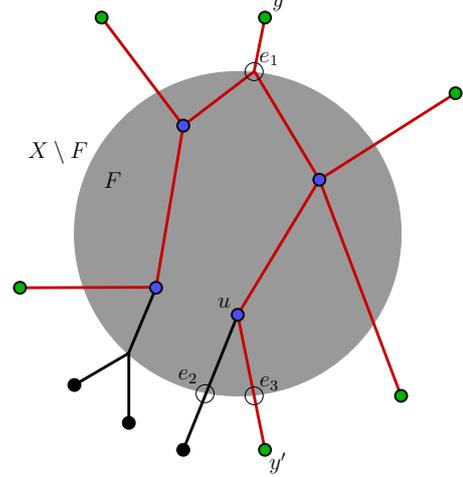
On va résoudre le premier problème de la manière suivante : on note  $C$  l'ensemble des  $y \in Y \setminus F$  tels qu'il existe  $u \in F$  avec  $(u, y) \in \xi'$ , c'est à dire l'ensemble des arrivées d'arêtes de  $\xi'$  sortant de  $F$ . On note  $\bar{\tau}$  le sous-graphe de  $\xi$  engendré par  $(F \cap Y) \cup C$ , et soit  $D$  sa frontière pour les sommets, c'est à dire l'ensemble des sommets de  $F \cap Y$  voisins de sommets de  $Y \setminus F$  dans  $\xi$ . Le cardinal de  $D$  est au moins  $|F \cap Y|/2$  par la proposition 2.5. Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $2|\partial_{\mathbf{E}}(F)| \geq |D|$  pour établir (6.1).

On choisit  $\varphi : D \rightarrow \partial_{\mathbf{E}}(F)$  une fonction qui a un sommet  $y$  de  $C$  associe  $e([u, y])$  avec  $u$  un sommet de  $F$  tel que  $(u, y) \in \mathbf{E}(\xi')$  et à un sommet  $v$  de  $F$  associe  $e([v, w])$  où  $w$  est un sommet de  $Y \setminus F$  tel que  $(w, v) \in \mathbf{E}(\xi')$  ; dans les deux cas le choix est possible par construction de  $\bar{\tau}$ . Le cardinal de  $\varphi^{-1}(\{e\})$  est au plus deux car  $|\varphi^{-1}(\{e\}) \cap F| \leq 1$  et  $|\varphi^{-1}(\{e\}) \cap C| \leq 1$ .

En effet soient  $u, u' \in \varphi^{-1}(\{e\}) \cap F$ . Il existe donc  $v, v' \in Y \setminus F$  tels que  $(v, u), (v', u') \in \mathbf{E}(\xi')$  et  $e([v, u]) = e([v', u']) = [s, w]$  où  $s \in f, w \in Y \setminus F$ . Si  $u$  et  $u'$  sont différents,  $v$  et  $v'$  sont différents car s'ils étaient égaux,  $u$  et  $u'$  seraient dans la même composante connexe du graphe induit sur  $X$  par  $\mathbf{V} \setminus \{v\}$ , ce qui n'est pas possible par construction. De plus si  $|\{u, v, u', v'\}| = 4$ , on a  $d_\omega(u, v) = d_\omega(u, s) + d_\omega(s, v) \leq d_\omega(u', v) = d_\omega(u', s) + d_\omega(s, v)$  et donc par symétrie  $d_\omega(s, v) = d_\omega(s, v')$ . Mais cela signifie que  $y(u) > y(u')$  et  $y(u') > y(u)$  ce qui est absurde, donc  $\{u, u', v, v'\} = \{u, v, v'\}$  et  $u = u'$ .



(a) Un exemple de structure de  $\xi'$  avec en bleu  $Y \cap F$  et en vert  $C$ .



(b) On construit ensuite  $\bar{\tau}$  (dont les arêtes sont en rouge);  $\varphi(y) = e_1$ ,  $\varphi(u) = e_2$ ,  $\varphi(y') = e_3$ , et si  $e_2 = e_3$ , on a alors  $\varphi^{-1}(\{e_2\}) = \{u, y'\}$ .

FIGURE 4 – Un exemple de construction de  $\bar{\tau}$  à partir de  $F$  et  $\xi'$ .

Par un raisonnement symétrique, si  $v, v' \in \varphi^{-1}(\{e\}) \cap C$ ,  $v = v'$ , et donc  $4|\partial_E(F)| \geq 2|D| \geq |F \cap Y|$ .

Comme  $X$  est moyennable, pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $F$  partie finie de  $V$  telle que  $|F \cap Y|/|F| < \epsilon$  p.s. Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|F \cap Y|/|F|) &= \mathbb{E} \left( \sum_{v \in F} \mathbb{1}_{\{v \in Y\}} \right) / |F| \\ &= \sum_{v \in F} \mathbb{P}(v \in Y) / |F| \\ &= \mathbb{P}(o \in Y) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathbb{P}(o \in Y) = 0$  ce qui est absurde car  $N(\omega) = \infty$ , comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 5.6.  $\square$

## 6.2 L'unicité est monotone

Pour ce qui est du cas non moyennable, comme pour l'existence de composantes connexes infinies, on a monotonie de l'unicité :

**Proposition 6.2** ([HP99]). *Soit  $X$  un graphe de Cayley d'un groupe  $G$  et  $p_1, p_2 \in ]p_c, 1]$ ,  $p_1 < p_2$ . Soient  $\omega_1, \omega_2$  deux percolations de Bernoulli sur  $X$  de paramètres respectifs  $p_1$  et  $p_2$ . Si  $N(\omega_2) = \infty$  p.s., alors  $N(\omega_1) = \infty$  p.s.*

*Démonstration.* Considérons le couplage croissant  $(\omega_1, \omega_2)$  de paramètres  $(p_1, p_2)$ . Comme  $E(\omega_1) \subset E(\omega_2)$ , toute composante connexe de  $\omega_1$  est incluse dans une composante connexe

de  $\omega_2$ ; nous allons montrer que chaque composante connexe infinie de  $\omega_2$  contient même une composante connexe infinie de  $\omega_1$  p.s., ce qui sera suffisant pour conclure.

On note  $K_i(v)$  la composante connexe d'un sommet  $v$  dans  $\omega_i$  et  $K_i(\infty) := \bigcup \{K_i(v) \mid |K_i(v)| = \infty\}$  pour  $i = 1, 2$  – puisque  $p_1 > p_c$ ,  $K_1(\infty) \neq \emptyset$  p.s. On cherche donc à montrer que pour tout  $v \in \mathbf{V}$  :

$$\mathbb{P}(d_X(K_2(v), K_1(\infty)) > 0, |K_2(v)| = \infty) = 0.$$

Montrons donc que  $\mathbb{P}(|K_2(v)| = \infty, d_X(K_2(v), K_1(\infty)) = n) = 0$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons par l'absurde que la probabilité est non nulle. Pour  $u$  un sommet de  $X$ , notons

$$S(u) := \begin{cases} \{w \in K_2(u) \mid \forall u' \in K_1(\infty) \setminus \{u\}, d_{\omega_2}(u, w) < d_{\omega_2}(u', w)\} & \text{si } u \in K_1(\infty), \\ \emptyset & \text{si } u \notin K_1(\infty). \end{cases}$$

Supposons  $v$  un sommet de  $X$  tel que  $K_2(v)$  est infini et  $d_X(K_2(v), K_1(\infty)) > 0$ . Puisque pour tous sommets de  $K_2(v)$ ,  $d_{\omega_2}(v, K_1(\infty)) = \infty$ , il suffit d'ouvrir dans  $\omega_2$  uniquement une chaîne de longueur  $n$  entre  $K_2(v)$  et un sommet  $u$  de  $K_1(\infty)$  pour avoir  $d_{\omega_2}(u, K_2(v)) = n$ ; ce faisant on a ouvert un nombre fini de chaînes de longueur  $n$  entre  $K_2(v)$  et  $K_1(\infty)$  et on peut donc en modifiant un nombre fini d'arêtes fermer toutes ces chaînes sauf une reliant  $u$  à  $K_2(v)$ . Par construction  $u$  est le seul sommet de  $K_1(\infty)$  à alors minimiser la distance, et on a donc  $K_2(v) \subset S(u)$ , et  $S(|u|) = \infty$ . Par le lemme 5.1, on en déduit que quelque soit  $v$ ,  $\mathbb{E}(|S(v)|) = \infty$ .

Mais introduisons le transport de masse  $m$  sur  $(\omega_1, \omega_2)$  défini par :

$$m(v, u; \omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S(u), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, chaque sommet est dans  $S(u)$  pour au plus un  $u$ . Et donc par le principe du transport de masse, on a :

$$1 \geq \sum_{u \in \mathbf{V}} M(v, u) = \sum_{u \in \mathbf{V}} M(u, v) = \mathbb{E}(|S(v)|) = \infty,$$

ce qui est absurde. □

Comme dans le cas non-moyennable la percolation de Bernoulli n'admet presque sûrement aucune composante connexe infinie, il existe un paramètre  $p_u$  dans  $[p_c, 1]$  tel que sur l'intervalle  $]p_c, p_u[$ , la percolation  $p$ -Bernoulli a une infinité de composante connexes infinies et sur l'intervalle  $]p_u, 1]$  elle en a une unique.

Il est à noter qu'il existe des graphes de Cayley non-moyennables pour lesquels l'unicité n'est obtenue que quand  $p$  vaut 1, et d'autres pour lesquels elle est obtenue sur un intervalle non trivial. Pour un exemple du premier cas, on peut prendre l'arbre régulier de degré  $d \geq 3$ , on étudiera plus en détail un exemple du deuxième cas dans la section 9.

**Proposition 6.3.** *Soit  $X$  un arbre régulier de degré  $d \geq 3$ . Pour tout  $p \in ]p_c, 1[$ , la percolation  $p$ -Bernoulli admet presque sûrement une infinité de composantes connexes infinies.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que si  $p \neq 1$ , la percolation  $p$ -Bernoulli  $\omega$  n'admet presque sûrement pas une unique composante connexe infinie. Supposons donc que c'est le cas. Soit  $v_1, \dots, v_d$  les voisins de  $o$  et  $B_1, \dots, B_d$  les branches de l'arbre issues de ces voisins, c'est à dire que  $B_i$  est l'ensemble des sommets de  $X$  qui sont plus proches de  $v_i$  que de  $o$  (ou encore dont l'écriture réduite commence par  $v_i$ ). Avec positive probabilité,  $K(o)$  est infinie et son intersection avec une certaine  $B_i$  est infinie. Puisque par définition des  $B_i$  le seul chemin simple entre  $o$  et un sommet de  $B_i$  ne passe que par des arêtes reliant deux sommets de  $B_i$  ou un sommet de  $B_i$  et  $o$ , les événements  $E_i := \{|K(o) \cap B_i| = \infty\}$  sont indépendants et identiquement distribués par isomorphisme entre les branches, et donc  $E_1 \cap E_2$  est de probabilité positive.

Mais alors il suffit de supprimer l'arête  $[o, v_1]$  pour avoir deux composantes connexes infinies, ce qui implique par le lemme 5.1 que  $X$  admet avec probabilité non nulle deux composantes connexes infinies – on remarquera ici la nécessité de l'hypothèse  $p < 1$  dans le lemme, puisque pour  $p = 1$ , on a bien évidemment  $N(\omega) = 1$ . Mais on a vu que  $X$  était un graphe de Cayley et donc la probabilité que  $X$  admette deux composantes connexes infinies est 0, on en déduit donc que pour  $n \neq 1$ ,  $N(\omega) \in \{0, \infty\}$ .  $\square$

## 7 Preuve du théorème 1.1

*Démonstration.* La seule chose qu'il reste à démontrer est que dans le cas non moyennable,  $p_c \leq 1 - \iota_{\mathbf{E}}(X) / \deg_X(o) < 1$ . Mais on peut le déduire de manière immédiate du corollaire 5.4 en remarquant que  $\mathbb{P}(e \notin \mathbf{E}(\omega)) = 1 - p$  pour une percolation  $p$ -Bernoulli.  $\square$

## 8 Indistinguabilité des composantes connexes infinies

Avant de nous concentrer sur un graphe en particulier, nous allons dans cette section établir un résultat très fort :

**Théorème 8.1.** *Soit une percolation de Bernoulli  $\omega$  sur un graphe de Cayley  $X$  d'un groupe  $G$  et soit  $\mathcal{A}$  une partie mesurable de  $\mathcal{P}(\mathbf{V}) \times \mathcal{P}(\mathbf{E}(X))$  invariante par l'action définie par  $g \cdot (E, V) := (g \cdot E, g \cdot V)$  pour tout  $g$  dans  $G$ . On dit qu'une composante connexe  $K$  et de type  $\mathcal{A}$  si  $(K, \mathbf{E}(\omega)) \in \mathcal{A}$ . Une de ces deux affirmations est vraie p.s. :*

- toute composante connexe infinie de  $\omega$  est de type  $\mathcal{A}$ ,
- toute composante connexe infinie de  $\omega$  est de type  $\mathcal{A}^c$ .

Autrement dit, toutes les composantes connexes infinies se ressemblent : une composante connexe infinie donnée a un sommet de degré 4, contient une infinité de points de rencontre ou ne contient aucun cycle si et seulement si c'est le cas de toutes les composantes connexes infinies. La preuve de ce résultat se trouve dans [LS99] ; nous allons ici donner l'idée de la preuve en omettant quelques détails.

Commençons par donner une idée de sa structure. On se fixera dans toute cette section une percolation  $p$ -Bernoulli  $\omega$  sur un graphe de Cayley  $X$  d'un groupe  $G$  ainsi qu'une partie mesurable  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\mathbf{V}) \times \mathcal{P}(\mathbf{E}(X))$ , et on supposera qu'il existe avec probabilité non nulle deux composantes connexes infinies de  $\omega$  de types différent. Le théorème étant trivial si ce n'est pas le cas, on supposera aussi que  $N(\omega) = \infty$  p.s. Si  $K(u)$  est une composante connexe infinie de  $\omega$ , on appelle *pivot* une arête  $e$  de  $X$  fermée dans  $\omega$  et

telle que dans  $Y$  le sous-graphe de  $S(X)$  d'arêtes  $E(\omega) \cup \{e\}$ , la composante connexe de  $u$  dans  $Y$ ,  $K_Y(u)$ , est de type différent de celui de  $K(u)$ .

Nous montrerons tout d'abord qu'il existe avec probabilité non nulle un pivot dans  $\omega$ , puis on construira un pivot à distance arbitrairement grande de  $o$  pour  $K(o)$ . Le lemme 4.7 nous dit qu'on peut connaître le type de  $K(o)$  avec une précision arbitraire en observant uniquement le contenu d'un boule  $B$  autour de  $o$ ; on en tirera une contradiction en remarquant que s'il existe un pivot en dehors de cette boule, par (5.1), la probabilité que  $K(o)$  soit de type  $\mathcal{A}$  sachant l'état des arêtes dans  $B$  est la même que la probabilité que  $K(o)$  est de type  $\mathcal{A}^c$  modulo un facteur borné. En construisant un pivot arbitrairement loin de  $o$ , on affirme qu'il n'est possible de connaître le type de  $K(o)$  en connaissant l'état des arêtes dans  $B$  que de manière limitée – ce qui est en contradiction avec la mesurabilité de  $\mathcal{A}$ .

Pour construire cette arête pivot, on utilisera le fait qu'une marche aléatoire simple retardée sur  $\omega$  est presque sûrement transiente si elle commence dans une composante connexe infinie, et que dans un certain sens (détaillé dans le lemme 8.4) elle est stationnaire. Ainsi si on peut trouver un pivot à une certaine distance de  $o$ , on pourra trouver un pivot à cette même distance du  $N$ -ième pas de notre marche aléatoire, donc très loin de  $o$  pour  $N$  assez grand – et ce avec la même probabilité.

Commençons donc par établir qu'on peut en trouver un.

**Lemme 8.2.** *Soit  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur un graphe connexe  $X$  et soit  $\mathcal{A}$  une partie mesurable de  $\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(E(X))$ . Si la probabilité que deux composantes connexes infinies existent simultanément est supérieure à 0, il existe p.s. une arête qui est pivot pour une composante connexe  $K$ .*

*Démonstration.* Prenons  $k$  le plus petit entier tel qu'il existe avec probabilité non nulle deux composantes connexes à distance  $r$  l'une de l'autre de types respectifs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^c$ . Notons que  $r > 0$ . Choisissons une arête  $e$ . Elle est donc avec probabilité positive la première arête d'une chaîne de longueur  $r$  entre deux composantes connexes infinies  $K(u)$  et  $K(v)$  dont l'une est de type  $\mathcal{A}$  et l'autre  $\mathcal{A}^c$ . Supposons que c'est le cas : dans  $Y \in S(X)$  le sous-graphe d'arêtes  $E(\omega) \cup \{e\}$ , la distance entre  $K(u)$  et  $K(v)$  est strictement inférieure à  $r$ , et donc par hypothèse sur  $r$ ,  $K(u)$  et  $K(v)$  sont dans  $Y$  du même type. Une des deux n'a pas le même type dans  $\omega$  et dans  $Y$ , par définition  $e$  est un pivot.  $\square$

## 8.1 Marches aléatoires simples retardées

Une marche aléatoire simple sur  $X$  est une chaîne de Markov sur  $X$  telle que la probabilité de passer de  $u$  à  $v$  est  $1/\deg_X(o)$  si  $u$  et  $v$  sont voisins, 0 sinon. Une manière de la réaliser est de tirer une suite i.i.d.  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de loi uniforme sur  $S$  l'ensemble des générateurs utilisés pour créer  $X$ , et de poser  $W_{n+1} := W_n \xi_n$ . Une marche aléatoire simple retardée sur un sous-graphe  $Y$  de  $X$  est définie de la même manière, sauf que si elle devrait emprunter une arête fermée dans  $\omega$ , elle ne bouge pas. On la définit :

$$W_{n+1} := \begin{cases} W_n \xi_n & \text{si } [W_n, W_n \xi_n] \in E(\omega), \\ W_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 8.3.** *Si  $\omega$  est une percolation de Bernoulli sur  $n$  graphe de Cayley  $X$  d'un groupe  $G$  vérifiant  $N(\omega) = \infty$  p.s., elle est telle qu'une marche aléatoire simple retardée commençant en un sommet  $u$  appartenant à une composante connexe infinie est transiente presque sûrement.*

*Idées de démonstration.* Il est démontré dans [LS99] qu'il existe une forêt de distribution  $G$ -invariante qui est un sous-graphe de  $\omega$  et est telle que toute composante connexe infinie de  $\omega$  contient un arbre avec au moins trois "bouts", c'est à dire (dans ce cas) trois chaînes infinies ouvertes dans  $\omega$  partant d'un même sommet et ne partageant aucune arête.

Par un transport de masse très similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 3.3 (c'est à dire qui envoie la masse des sommets de l'arbre sur le sommet de degré 3 le plus proche), on peut – quitte à enlever les sommets de degré 2 – se ramener à une forêt  $\mathcal{F}$  dont tous les sommets sont de degré 3 et telle que chaque composante connexe infinie de  $\omega$  en contienne une composante connexe.

Or une marche aléatoire simple  $W$  partant d'un sommet  $v$  sur  $\mathcal{F}$  est transiente. En effet si on considère la chaîne de Markov  $d_{\mathcal{F}}(W_0, W_n)$ , il s'agit en loi d'une marche aléatoire sur  $\mathbb{N}$  de noyau de transition :

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (0, 1), \\ 2/3 & \text{si } y = x + 1, x \neq 0, \\ 1/3 & \text{si } y = x - 1, y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une telle marche aléatoire biaisée sur  $\mathbb{N}$  est transiente, et ainsi la chaîne  $W$  est transiente. Or le principe de monotonie de Rayleigh (voir par exemple [LP16]) dit qu'un graphe possédant un sous-graphe transiente est lui aussi transiente pour la marche aléatoire simple. Il est clair que la marche aléatoire simple retardée est transiente si et seulement si la marche aléatoire simple sur  $\omega$  est transiente, d'où la proposition.  $\square$

Soit  $W^+$  et  $W^-$  deux marche aléatoire simple retardée indépendantes issues d'un sommet  $v$  sur  $\omega$ . On définit un processus aléatoire  $(W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  par :

$$W_n := \begin{cases} W_n^+ & \text{si } n \geq 0, \\ W_{-n}^- & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle  $W$  *marche aléatoire simple retardée à double sens sur  $\omega$* . Notons que cette appellation a un sens car une marche aléatoire simple retardée est réversible.

On définit l'opérateur de décalage  $\mathcal{S}$  qui a une marche aléatoire simple retardée à double sens  $(W_n)$  associe  $\mathcal{S}W$  définie par  $(\mathcal{S}W)_n := W_{n+1}$ . Il agit aussi trivialement sur  $\omega$  : on note  $\mathcal{S}(W, \omega) := (\mathcal{S}W, \omega)$ . Si  $W$  est issue de  $o$ ,  $W$  et  $\mathcal{S}W$  n'ont pas la même loi p.s. : sauf si  $o$  est de degré 0,  $1 = \mathbb{P}(W_0 = o) \neq \mathbb{P}(W_1 = o)$ . En revanche c'est le cas pour la tribu des évènements  $G$  invariants.

**Lemme 8.4.** *Soit  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$  d'un groupe  $G$ , et  $W$  une marche aléatoire simple retardée à double sens issue d'un sommet  $v$ . Soit de plus  $\mathcal{A}$  une partie mesurable et  $G$ -invariante de  $\mathbb{V}^{\mathbb{Z}} \times S(X)$ . Alors  $\mathbb{P}((W, \omega) \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}((\mathcal{S}W, \omega) \in \mathcal{A})$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathbb{P}_v$  la mesure de probabilité pour laquelle  $W$  est issue de  $v$ , et  $\mu$  la somme des  $\mathbb{P}_u$  pour  $u$  dans  $\mathbf{V}$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une partie mesurable, mais pas nécessairement  $G$ -invariante, de  $\mathbf{V}^{\mathbb{Z}} \times S(X)$ . On a :

$$\mu((W, \omega) \in \mathcal{B}) = \mu((W, \omega) \in \mathcal{S}\mathcal{B}). \quad (8.1)$$

En effet soit  $E$  une partie mesurable de  $\mathbf{V}^{\mathbb{Z}} \times S(X)$  de la forme  $\{(Z, \omega) \mid Z_i = v_i, Z_{i+1} = v_{i+1}, \dots, Z(j) = v_j\}$ , avec  $i < 0 < j$  et  $v_i, \dots, v_j \in \mathbf{V}$ . Il est immédiat que  $\mathbb{P}_v((W, \omega) \in E \mid \omega) = 0$  si  $v \neq v_0$ , et donc :

$$\mu((W, \omega) \in E \mid \omega) = \mathbb{P}_{v_0}((W, \omega) \in E \mid \omega) = \prod_{k=i}^{j-1} p_\omega(v_k, v_{k+1})$$

où  $p_\omega$  est le noyau de transition de  $W$ .

La partie  $\mathcal{S}E$  étant égale à  $\{(Z, \omega) \mid Z_{i+1} = v_i, \dots, Z_{j+1} = v_j\}$ , puisque  $i + 1 \leq 0 < j + 1$ , le même raisonnement nous donne  $\mu((W, \omega) \in \mathcal{S}E \mid \omega) = \prod_{k=i}^{j-1} p_\omega(v_k, v_{k+1})$ . Les évènements de la forme de  $E$  engendrant la tribu cylindrique, et puisqu'ils sont stables par intersection finie, le lemme des classes monotones nous donne  $\mu((W, \omega) \in \mathcal{B} \mid \omega) = \mu((W, \omega) \in \mathcal{S}\mathcal{B} \mid \omega)$ . En intégrant on a donc (8.1).

De plus, pour un  $E$  de la forme ci-dessus, et  $g$  un élément de  $G$ ,

$$\mu((W, \omega) \in g \cdot E \mid \omega) = \prod_{k=i}^{j-1} p_{g \cdot \omega}(g \cdot v_k, g \cdot v_{k+1})$$

où  $p_{g \cdot \omega}$  est le noyau de transition de la marche aléatoire simple retardée sur  $g \cdot \omega$ . Mais par (3.1),  $p_{g \cdot \omega}(g \cdot u, g \cdot v) = p_\omega(u, v)$  pour tous  $u, v$  dans  $\mathbf{V}$ ; par conséquent  $\mu((W, \omega) \in E \mid \omega) = \mu((W, \omega) \in g \cdot E \mid \omega)$  et donc comme plus haut  $\mu((W, \omega) \in \mathcal{B}) = \mu((W, \omega) \in g \cdot \mathcal{B})$  – on a  $G$  invariance de  $\mu$ .

Revenons à présent à  $\mathcal{A}$ . On définit  $\phi(u, v) := \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_{-1} = u, W_0 = v)$ . Il s'agit d'une fonction invariante sous l'action diagonale de  $G$  : pour tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \phi(g \cdot u, g \cdot v) &= \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_{-1} = g \cdot u, W_0 = g \cdot v) \\ &= \mu((W, \omega) \in g \cdot \mathcal{A}, W_{-1} = g \cdot u, W_0 = g \cdot v) \quad (\text{par } G\text{-invariance de } \mathcal{A}) \\ &= \phi(u, v) \end{aligned}$$

par  $G$ -invariance de  $\mu$ .

Puisque  $\phi$  est  $G$ -invariante, les mêmes calculs que ceux utilisés pour démontrer le transport de masse nous donnent :

$$\begin{aligned} \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_{-1} = o) &= \sum_{u \in \mathbf{V}} \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_{-1} = o, W_0 = u) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}} \phi(o, u) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}} \phi(u, o) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{V}} \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_0 = o, W_{-1} = u) \\ &= \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_0 = o). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_o((W, \omega) \in \mathcal{A}) &= \mu((W, \omega) \in \mathcal{A}, W_0 = o) && \text{(toutes les } \mathbb{P}_v \text{ s'annulent sauf } \mathbb{P}_o) \\
&= \mu(\mathcal{S}(W, \omega) \in \mathcal{A}, W_{-1} = o) && \text{(par (8.1))} \\
&= \mu((W, \omega) \in \mathcal{S}\mathcal{A}, W_{-1} = o) \\
&= \mu((W, \omega) \in \mathcal{S}\mathcal{A}, W_0 = o) && \text{(par (8.2))} \\
&= \mathbb{P}_o((W, \omega) \in \mathcal{S}\mathcal{A})
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 8.2 Suite et fin

*Démonstration du théorème 8.1.* D'après le lemme 8.2, on peut trouver avec probabilité non nulle un pivot pour une composante connexe infinie de type  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{A}^c$ . Quitte à passer au complémentaire, on va supposer sans perte de généralité qu'il existe avec probabilité non nulle un pivot pour une composante connexe infinie de type  $\mathcal{A}$ .

Notons  $\mathcal{A}_o$  l'évènement où  $|K(o)| = \infty$  et  $K(o)$  est de type  $\mathcal{A}$  dans  $\omega$ . On se fixe  $r \in \mathbb{N}$  tel qu'avec probabilité strictement positive,  $\mathcal{A}_o$  soit vérifié et il existe une arête  $e$  à distance  $r$  de  $o$  qui est pivot pour  $K(o)$  dans  $\omega$ . On va aussi fixer  $\varepsilon > 0$  et choisir grâce au lemme 4.7 un entier  $R$  et une partie  $\mathcal{A}'_o$  vérifiant  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \Delta \mathcal{A}'_o) < \varepsilon$  et ne dépendant que des arêtes entre sommets de la boule  $B_X(o, R)$ . Soit de plus  $W$  une marche aléatoire simple retardée à double sens sur  $\omega$  issue de  $o$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite d'arêtes de  $X$  où  $e_n$  est choisie uniformément à distance  $r$  de  $W_n$ . On note  $\mathcal{P}_e$  l'évènement où l'arête  $e$  est pivot pour  $K(o)$  et  $\mathcal{E}_e^n$  l'évènement où  $e_n = e$  et  $W_i$  n'est pas une extrémité de  $e$  pour tout  $-\infty < i < n$ ,  $\mathcal{E}^n := \bigsqcup_{e \in \mathcal{V}} \mathcal{E}_e^n$  et  $\mathcal{E}_R^n := \bigsqcup_{e \in \mathcal{V} \setminus B_X(o, R)} \mathcal{E}_e^n$ .

Si on se fixe  $n$  grand, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \Delta \mathcal{A}'_o) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o^c) \\
&\geq \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o^c \cap \mathcal{E}_R^n) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{V} \setminus B_X(o, R)} \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o^c \cap \mathcal{E}_e^n) \\
&\geq \sum_{e \in \mathcal{V} \setminus B_X(o, R)} \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \Pi_e(\mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{A}_o) \cap \mathcal{E}_e^n) && \text{(notation du lemme 5.1)} \\
&\geq \sum_{e \in \mathcal{V} \setminus B_X(o, R)} \mathbb{P}(\Pi_e(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n}) \cap \mathcal{E}_e^n) \quad \text{(car } \mathcal{A}'_o \text{ ne dépend pas de } e).
\end{aligned}$$

Soit un évènement  $E$  de la forme  $\{\omega \in \mathcal{B}\}$  de probabilité non nulle. On note  $Y_e^n := \mathbb{P}(\mathcal{E}_e^n \mid \omega)$ ; il s'agit d'une variable aléatoire  $\mathcal{C}_{-e}$ -mesurable, où  $\mathcal{C}_{-e}$  est la sous-tribu de la

tribu cylindrique des évènements indépendants de l'état de  $e$  dans  $\omega$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Pi_e E \cap \mathcal{E}_e^n) &= \mathbb{E}(P(\Pi_e E \cap \mathcal{E}_e^n \mid \omega)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\Pi_e E} Y_e^n) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\Pi_e E \mid \mathcal{C}_{-e}) Y_e^n) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}((e \in \mathbf{E}(\omega), \Pi_e E \cup \Pi_{-e} E \mid \mathcal{C}_{-e}) Y_e^n)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{P}(e \in \mathbf{E}(\omega) \mid \mathcal{C}_{-e}) \mathbb{1}_{\Pi_e E \cup \Pi_{-e} E} Y_e^n) \\
&= p \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\Pi_e E \cup \Pi_{-e} E} Y_e^n) \\
&\geq p \mathbb{E}(\mathbb{1}_E Y_e^n) && \text{(car } E \subset \Pi_e E \cup \Pi_{-e} E) \\
&= p \mathbb{P}(E \cap \mathcal{E}_e^n).
\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \mathbb{P}(\mathcal{A}_o \Delta \mathcal{A}'_o) \geq p \sum_{e \in \mathbb{V} \setminus B_X(o, R)} \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}_e^n) \\
&= p \mathbb{P}(\mathcal{A}'_o \cap \mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}_R^n) \\
&= p \mathbb{P}(((\mathcal{A}'_o \cup \mathcal{A}_o) \setminus (\mathcal{A}'_o \Delta \mathcal{A}_o)) \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}_R^n) \\
&\geq p \mathbb{P}((\mathcal{A}_o \setminus (\mathcal{A}'_o \Delta \mathcal{A}_o)) \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}_R^n) \\
&\geq p(\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}_R^n) - \varepsilon) \\
&\geq p(\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}^n) - 2\varepsilon)
\end{aligned} \tag{8.3}$$

quand  $n$  est assez grand pour que  $\mathbb{P}(e_n \in B_X(o, R)) < \varepsilon$ , ce qui est rendu possible par la proposition 8.3. Rappelons que par définition de  $r$  et le lemme 8.2,  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_0})$  est de probabilité strictement positive, et par transience si  $\mathcal{A}_o$  et  $\mathcal{P}_{e_0}$  sont vérifiés, il existe p.s.  $m_0$  le plus petit  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $W_m$  est à distance  $r$  de  $e_0$ , c'est à dire tel que  $\{e_0 = e_m\}$  est de probabilité non nulle.

Par conséquent  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_{m_0}} \cap \mathcal{E}^{m_0}) > 0$ . Mais  $\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_{m_0}} \cap \mathcal{E}^{m_0}$  peut s'écrire sous la forme  $\{\omega \in \mathcal{B}_{m_0}\}$  où  $\mathcal{B}_{m_0}$  est  $G$ -invariant car  $K(o) = K(W_{m_0})$ . En utilisant le lemme 8.4 pour le  $n$  choisi plus haut,  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}^n) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_{m_0}} \cap \mathcal{E}^{m_0})$  et donc ne dépend pas de  $\varepsilon$  et est strictement supérieur à 0.

Mais dans (8.3), en rendant  $\varepsilon$  arbitrairement petit on rend  $\mathbb{P}(\mathcal{A}_o \cap \mathcal{P}_{e_n} \cap \mathcal{E}^n)$  arbitrairement petit, ce qui est donc absurde.  $\square$

## 9 Une étude de cas : $T \times \mathbb{L}$

Nous avons pour l'instant uniquement mentionné l'arbre régulier de degré  $d > 2$  comme exemple de graphe de Cayley non moyennable. Il s'agit cependant d'un cas particulièrement simple puisque ses deux paramètres sont connus, comme nous l'avons vu  $p_u = 1$  et  $p_c = 1/(d-1)$ . De plus sa phase d'unicité est réduite à  $p = 1$ ; c'est la raison pour laquelle nous allons étudier plus en détail un autre graphe,  $T \times \mathbb{L}$ , pour lequel  $N$  prend ses trois valeurs possibles sur trois intervalles non réduits à des singletons.

Ici  $T$  est l'arbre régulier de degré  $d \geq 3$ , c'est à dire le graphe de Cayley du groupe libre à  $d$  générateurs (en comptant les inverses) pour lesdits générateurs (voir figure 1b). Le graphe  $\mathbb{L}$  est quant à lui le graphe de Cayley du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  muni des générateurs  $+1$  et  $-1$  (voir figure 1c). Le produit de graphes est défini comme suit :

**Définition 9.1.** Soit  $X$  et  $Y$  deux graphes. On appelle *produit cartésien de  $X$  et  $Y$*  et on note  $X \times Y$  le graphe défini comme suit :

- $\mathbf{V}(X \times Y) := \mathbf{V}(X) \times \mathbf{V}(Y)$  et
- $\mathbf{E}(X \times Y) := \{[(u_X, w), (v_X, w)] \mid [u_X, v_X] \in \mathbf{E}(X), w \in \mathbf{V}(Y)\} \cup \{[(w, u_Y), (w, v_Y)] \mid [u_Y, v_Y] \in \mathbf{E}(Y), w \in \mathbf{V}(X)\}$ .

Cette notion de produit coïncide de manière assez naturelle avec le produit de groupes pour les graphes de Cayley :

**Proposition 9.2.** Soit  $X$  le graphe de Cayley d'un groupe  $G_1$  pour un ensemble de générateurs  $S_X$  et  $Y$  le graphe de Cayley d'un groupe  $G_2$  pour un ensemble de générateurs  $S_Y$ . Le graphe  $X \times Y$  est le graphe de Cayley du groupe  $G_1 \times G_2$  pour les générateurs  $\{(s, o_2) \mid s \in S_X\} \cup \{(o_1, s) \mid s \in S_Y\}$ , où  $o_1$  et  $o_2$  sont les neutres respectifs de  $G_1$  et  $G_2$ .

*Démonstration.* Ce graphe de Cayley et le produit  $X \times Y$  ont les mêmes ensembles de sommets,  $\mathbf{V}(X) \times \mathbf{V}(Y) = G_1 \times G_2$ , il suffit donc de vérifier qu'ils ont les mêmes arêtes. Soit donc  $[(u_X, u_Y), (v_X, v_Y)]$  une arête de  $X \times Y$ . Si  $u_X = v_X$ ,  $[u_Y, v_Y] \in \mathbf{E}(Y)$  et donc par définition de  $Y$ , il existe  $s \in S_Y$  tel que  $u_Y = v_Y s$ , et  $(u_X, u_Y) = (v_X, v_Y)(o_1, s)$ . Il s'agit donc bien d'une arête du graphe de Cayley, et il en est de même si  $v_X = v_Y$ .

Réciproquement, si  $[(u_X, u_Y), (v_X, v_Y)]$  est une arête du graphe de Cayley et  $(u_X, u_Y) = (v_X, v_Y)(o_1, s)$ ,  $u_X = v_X$  et  $[u_Y, v_Y] \in \mathbf{E}(Y)$ , donc l'arête est bien dans  $\mathbf{E}(X \times Y)$ . Il en est de même si  $(u_X, u_Y) = (v_Y, v_Y)(s, o_2)$  et on a bien l'égalité des ensembles d'arêtes, et donc des graphes.  $\square$

Le graphe  $T \times \mathbb{L}$  est donc un graphe de Cayley dont tous les sommets sont de degré  $d + 2$ . Il est de plus non moyennable, notons en effet  $\pi_T$  et  $\pi_{\mathbb{L}}$  les projections canoniques sur  $T$  et  $\mathbb{L}$ . Si on prend une partie finie  $F$  de  $\mathbf{V}(T \times \mathbb{L})$ , on peut l'écrire sous la forme :  $F = \bigsqcup_{k \in I} \pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k) \cap F$  où  $I$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$ . Chaque  $\pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k) \cap F$  est une partie finie des sommets du graphe engendré par  $\pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k)$  qui est par construction du produit de graphe un graphe isomorphe à  $T$ , donc un arbre régulier de degré supérieur ou égal à 3. Par la proposition 2.5, on a donc au moins  $|\pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k)|/2$  sommets de  $\pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k) \cap F$  qui sont voisins de  $\pi_{\mathbb{L}}^{-1}(k) \setminus F$ . En sommant sur les  $k$  dans  $I$ , on a donc bien  $\iota_{\mathbb{E}}(T \times \mathbb{L}) \geq 1/2$ .

On peut par conséquent appliquer les résultats du théorème 1.1 : il existe  $p_c \in [1/(d+1), 1 - 1/(2d+4)[$  et  $p_u \in [p_c, 1]$  tels que la percolation  $p$ -Bernoulli n'a aucune composante connexe infinie pour  $p \in [0, p_c]$ , une infinité pour  $p \in ]p_c, p_u[$  et une unique pour  $p \in ]p_u, 1]$ .

Comme mentionné plus haut, pour  $T \times \mathbb{L}$ ,  $0 < p_c < p_u < 1$ . Nous avons déjà démontré la première inégalité, la deuxième est traitée dans [NG90] et [Li 13], nous allons montrer la troisième.

**Théorème 9.3.** Il existe  $p_u < 1$  tel que pour  $p \in ]p_u, 1]$ , la percolation  $p$ -Bernoulli sur  $T \times \mathbb{L}$  admet presque sûrement une unique composante connexe infinie.

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin de quelques résultats intermédiaires.

## 9.1 Il existe un intervalle non trivial d'unicité pour $\mathbb{L}^2$

Ici  $\mathbb{L}^2$  est le produit de  $\mathbb{L}$  par lui-même, c'est à dire le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  pour  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$  et  $(0, -1)$ .

**Théorème 9.4** ([Gri13]). *Pour la percolation de Bernoulli sur  $\mathbb{L}^2$ ,  $p_c < 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \in [0, 1]$  et soit  $\omega'$  une percolation  $(1-p)$ -Bernoulli sur  $\mathbb{L}^2$ . Définissons la percolation  $\omega_d$  sur  $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$  par  $[u + (1/2, 1/2), v + (1/2, 1/2)] \in \mathbb{E}(\omega_d) \iff [u, v] \in \omega'$  pour tout  $u, v \in \mathbb{Z}^2$ .

Si on représente  $\mathbb{L}^2$  et  $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$  dans le plan et qu'on identifie l'arête  $[u, v]$  avec le segment  $[u, v]$  pour  $u, v$  deux sommets de  $\mathbb{L}^2$  ou deux sommets de  $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$ , on remarque que chaque arête de  $\mathbb{L}^2$  a une unique intersection avec une unique arête de  $\mathbb{L}^2 + (1/2, 1/2)$ . Par conséquent si on définit  $\omega$  comme la percolation dans laquelle une arête est ouverte si et seulement si elle n'est pas intersectée par une arête de  $\omega_d$ , il s'agit d'une percolation  $p$ -Bernoulli. Il est assez clair que  $K((0, 0))$  est finie (dans  $\omega$  donc) si et seulement si il existe un cycle simple de  $\omega_d$  dont les arêtes forment un polygone à l'intérieur duquel se trouve  $(0, 0)$  (voir [Kes82] pour une preuve rigoureuse).

Essayons d'estimer  $\rho(n)$  le nombre de tels cycles de longueur  $n$ . Chacun de ces cycles passe par un sommet de la forme  $(k + 1/2, 1/2)$ , avec  $0 \leq k < n$  – un cycle entourant  $(0, 0)$  et passant par un sommet de la forme  $(k + 1/2, 1/2)$  avec  $k \geq n$  est de longueur au moins  $2n + 2$ . On peut voir chacun de ces cycles comme une chaîne simple partant dudit sommet et de longueur  $n - 1$ . On a vu dans la preuve de la proposition 4.8 que le nombre maximal de ces chaînes était  $4 \times (4 - 1)^{n-2}$ ; chacune d'entre elles a une probabilité  $(1 - p)^n$  d'être ouverte dans  $\omega_d$ . On en déduit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|K((0, 0))| < \infty) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\text{il existe un cycle de longueur } n \text{ entourant } (0, 0) \text{ dans } \omega_d) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \times 4 \times 3^{n-2} \times (1 - p)^n \\ &\leq \frac{4}{9} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n(3(1 - p))^n. \end{aligned}$$

Lorsque  $0 < r < 1$ , la série de terme général  $nr^n$  converge et a pour somme  $\frac{r}{(1-r)^2}$ . Par conséquent, lorsque  $3(1 - p)$  est suffisamment petit, on peut rendre la probabilité que  $K((0, 0))$  soit finie dans le calcul qui précède aussi petite que voulu. On en conclut que pour des valeurs de  $p$  proches de 1, la composante connexe de tout sommet dans  $\omega$ , une percolation  $p$ -Bernoulli, est infinie avec probabilité strictement positive et donc que  $p_c < 1$ .  $\square$

**Corollaire 9.5.** *Pour la percolation de Bernoulli sur  $\mathbb{L}^2$ ,  $p_u = p_c < 1$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 6.1, il nous suffit de montrer que  $\mathbb{L}_2$  est moyennable. Prenons  $Y_n$  le sous-graphe induit par les sommets dont toutes les coordonnées sont inférieures ou égales à  $n$ , c'est à dire un caré de côté  $2n$  centré en  $(0, 0)$ . Il a donc  $4n^2$  sommets, et  $\partial_E(Y_n) = 4 \times 2n = 8n$ . Ainsi lorsque  $n$  est grand,  $\partial_E(Y_n)/\mathbb{V}(Y_n) = 2/n$  est arbitrairement proche de 0. Ainsi  $\iota_E(\mathbb{L}^2) = 0$  et donc  $\mathbb{L}^2$  est moyennable, et par conséquent  $p_c = p_u$ .  $\square$

On note  $p_c^{\mathbb{L}^2}$  le paramètre critique pour  $\mathbb{L}^2$ .

## 9.2 La connectivité diminue avec la distance si $N \neq 1$ p.s.

Ce dernier résultat va nous permettre de caractériser les percolations pour lesquelles la composante connexe infinie est presque sûrement unique.

**Théorème 9.6** ([LS99]). *Soit  $\omega$  une percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley  $X$ . Si  $\omega$  admet p.s. une infinité de composantes connexes infinies, alors :*

$$\inf\{\mathbb{P}(K(o) = K(v)) \mid v \in \mathbf{V}\} = 0.$$

Pour établir ce théorème, on va introduire une notion de densité des composantes connexes dans  $X$  – le théorème 8.1 nous dira ensuite que cette densité doit être la même pour toutes les composantes connexes infinies, et donc doit être 0 si il y en a une infinité.

Soyons plus précis : soit  $Y$  une marche aléatoire simple sur  $X$  partant de  $o$ . Si  $C$  est une partie de  $\mathbf{V}$ , on note :

$$\alpha(C) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Y_i \in C}$$

lorsque la limite existe. Cela rejoint l'idée intuitive de densité de la partie  $C$  dans  $X$  :  $\alpha(C)$  représente la proportion de sommets, choisis au hasard d'une manière qu'on espère être de moins en moins biaisée par le choix du point de départ quand  $n$  tend vers l'infini, qui sont dans  $C$ .

**Lemme 9.7.** *Soit  $X$  un graphe de Cayley d'un groupe  $G$ . Il existe une fonction mesurable  $\text{freq} : \mathcal{P}(\mathbf{V}) \rightarrow [0, 1]$  telle que si  $\omega$  est une percolation de Bernoulli sur  $X$  et  $Y$  une marche aléatoire simple partant de  $o$  indépendante de  $\omega$ , pour toute composante connexe  $K$  de  $\omega$ ,  $\text{freq}(K) = \alpha(K)$  p.s, et  $\text{freq}$  est  $G$ -invariante.*

Une démonstration de ce lemme est donnée dans [LS99].

*Démonstration du théorème 9.6.* Par le théorème 8.1, il existe une constante  $c$  telle que p.s.  $\text{freq}(K) = c$  pour toute composante connexe infinie de  $\omega$ . Supposons alors que  $\omega$  admette une infinité de composantes connexes infinies p.s. Puisque si les  $K_n$  sont les composantes connexes infinies de  $\omega$ , la somme des  $\alpha(K_n)$  est inférieure ou égale à 1,  $c = 0$ . De plus la marche aléatoire simple sur un graphe transitif connexe infini étant récurrente nulle, pour tout sommet  $v$   $\alpha(\{v\}) = 0$ , et donc pour toute composante connexe  $K$  de  $\omega$ , finie ou infinie,  $\alpha(K) = 0$ .

Supposons à l'inverse que  $\inf\{\mathbb{P}(K(o) = K(v)) \mid v \in \mathbf{V}\} > 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Y_i \in K(o)} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_i \in K(o)) \\ &\geq \inf\{\mathbb{P}(K(o) = K(v)) \mid v \in \mathbf{V}\}. \end{aligned}$$

On a enfin par le théorème de convergence dominée  $\mathbb{E}(\text{freq}(K(o))) = \mathbb{E}(\alpha(K(o))) > 0$ , et donc  $\omega$  admet p.s. une unique composante connexe infinie.  $\square$

### 9.3 Il existe un intervalle non trivial d'unicité pour $T \times \mathbb{L}$

*Démonstration du théorème 9.3.* Soit  $p \in ]p_c^{\mathbb{L}^2}, 1]$  et  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur  $T \times \mathbb{L}$ . Prenons deux sommets différents  $(u, n)$  et  $(v, m)$  de  $T \times \mathbb{L}$  : il existe une chaîne simple  $u = u_0, u_1, \dots, u_{d_T(u,v)} = v$  reliant  $u$  à  $v$  dans  $T$  (possiblement de longueur nulle si  $u = v$ ).

On peut sans difficulté construire un chemin de  $T$  isomorphe à  $\mathbb{L}$  qui contient  $\gamma$  : il existe un générateur  $s$  de la partie utilisée pour créer le graphe de Cayley  $T$  différent de  $u_0^{-1}u_1$ . Si  $s$  n'est pas d'ordre 2, on prolonge la chaîne pour des valeurs négatives en posant  $u_{-n} := u_0 s^n$ . Si  $s$  est d'ordre 2, on la prolonge pour des valeurs négatives en posant  $u_{-n} := u_0 (s u_0^{-1} u_1)^{\frac{n}{2}}$  si  $n$  est pair et  $u_{-n} := u_0 (s u_0^{-1} u_1)^{\frac{n-1}{2}} s$  si  $n$  est impair. On prolonge de la même manière pour des valeurs positives pour obtenir une suite  $u$  de sommets telle que  $[u_i, u_{i+1}] \in E(T)$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ . Par définition de  $T$ , pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $u_i \neq u_{i+2}$  et donc les  $u_i$  sont distincts deux à deux car sinon  $T$  admettrait un cycle. On a donc un isomorphisme de graphes entre le graphe induit par les  $u_i$  et  $\mathbb{L}$ .

Si on se replace dans  $T \times \mathbb{L}$ , et qu'on prend le sous-graphe  $Y$  de  $T \times \mathbb{L}$  induit par l'ensemble des sommets  $(u_i, j)$  pour  $i, j \in \mathbb{Z}$ , il est isomorphe à  $\mathbb{L}^2$  en tant que produit d'un graphe isomorphe à  $\mathbb{L}$  et de  $\mathbb{L}$ . Notons  $\omega_Y$  la percolation induite par  $\omega$  sur  $Y$ , et  $K(u)$  la composante connexe dans  $\omega_Y$  d'un sommet  $u$  de  $Y$ . Il s'agit clairement d'une percolation  $p$ -Bernoulli, et donc comme  $p > p_c^{\mathbb{L}^2}$ ,  $\mathbb{P}(|K(u)| = \infty) = \mathbb{P}(|K(v)| = \infty) > 0$ . Mais si  $K(u)$  et  $K(v)$  sont infinies, par la proposition 6.1,  $K(u) = K(v)$  p.s. On peut ici utiliser l'inégalité FKG –  $\{|K(u)| = \infty\}$  est clairement croissant – et donc :

$$\mathbb{P}(K(u) = K(v)) \geq \mathbb{P}(|K(u)| = \infty, |K(v)| = \infty) \geq \mathbb{P}(|K(o)| = \infty)^2.$$

On peut par conséquent appliquer le théorème 9.6 pour en déduire que  $\omega$  admet une unique composante connexe infinie p.s. dès que  $p > p_c^{\mathbb{L}^2}$ . Comme on a montré que  $p_c^{\mathbb{L}^2} < 1$ , l'intervalle d'unicité est non trivial et  $p_u \leq p_c^{\mathbb{L}^2}$ .  $\square$

### 9.4 Conclusion

La valeur exacte de  $p_c^{\mathbb{L}^2}$  est établie dans [Kes80] à  $1/2$  – on a donc pour  $T \times \mathbb{L}$  la borne explicite  $p_u \leq 1/2$ . On peut même aller un peu plus loin et montrer que l'inégalité est stricte dès que  $d$ , le degré de  $T$ , est au moins 4. Pour cela nous allons utiliser le résultat de [Kes82] sur les percolations anisotropiques sur  $\mathbb{L}^2$  : si  $\omega$  est une percolation sur  $\mathbb{L}^2$  telle que les événements  $\{e \in E(\omega)\}$  sont indépendants et que pour tous  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}([(n, m), (n+1, m)] \in E(\omega)) = \tau$ ,  $\mathbb{P}([(n, m), (n, m+1)] \in E(\omega)) = \lambda$  où  $\tau$  et  $\lambda$  sont des paramètres compris entre 0 et 1, alors  $N(\omega) = 1$  si et seulement si  $\tau + \lambda > 1$ .

Lorsqu'on a choisi un chemin infini de  $T$  passant par les projections de  $u$  et  $v$  dans la preuve du théorème 9.3, on a oublié la majorité des arêtes du graphes. Plaçons nous donc en un sommet  $w$  de  $T$  qui est sur ce chemin infini. Puisque nous supposons  $d \geq 4$ , il existe deux arêtes  $[w, x]$  et  $[w, y]$  qui ne sont pas dans ce chemin infini. Prenons  $n \in \mathbb{Z}$ . Les sommets de  $T \times \mathbb{L}$   $(w, n)$   $(w, n+1)$  sont liés si l'arête entre les deux existe, bien sûr, mais aussi si l'évènement  $E_x^n$  ou l'évènement  $E_y^n$  sont vérifiés, où  $E_x^n := \{[(w, n), (x, n)], [(x, n), (x, n+1)], [(x, n+1), (w, n+1)]\} \subset E(\omega)$  et  $E_y^n$  est défini de la même manière en remplaçant  $x$  par  $y$ .

On remarque que  $E_x^n$  est indépendant de  $E_x^m$  dès que  $|n - m| \geq 2$ , et que  $E_x^n$  est

indépendant de  $E_y^m$  pour tous  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Définissons donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  :

$$E^n := \begin{cases} E_x^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ E_y^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

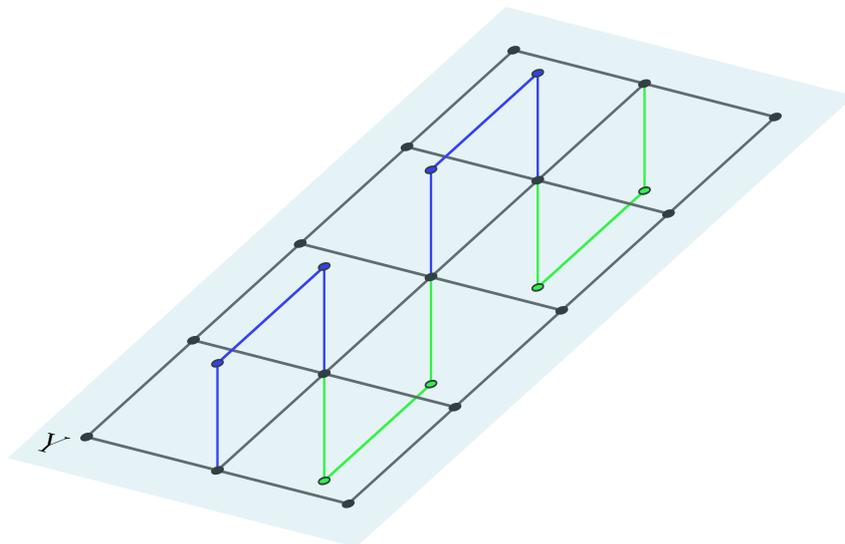


FIGURE 5 – L'ensemble des arêtes qu'on va ajouter à  $Y$  pour former  $Y'$  pour les sommets de la forme  $(w, n)$ .

Les  $E^n$  sont donc indépendants, de même probabilité  $p^3$  et indépendants de l'état des arêtes du sous-graphe  $Y$  tel que défini dans la preuve du théorème 9.3 – et si  $E^n$  est vérifié, les sommets  $(w, n)$  et  $(w, n + 1)$  sont liés dans  $T \times L$ . Ainsi si on prend le graphe  $Y$  et qu'on lui ajoute les arêtes impliquées dans la définition des  $E_n$ , on peut d'une certaine manière le considérer comme  $\mathbb{L}^2$  dont on aurait dédoublé les arêtes du type  $[(w, n), (w, n + 1)]$ . On peut voir sur la figure 5 la manière dont sont ajoutées ces nouvelles arêtes : chaque groupe de trois arêtes bleues est l'ensemble des arêtes dont dépend un  $E_x^n$ , chaque groupe de trois arêtes vertes l'ensemble des arêtes dont dépend un  $E_y^n$ . On peut voir chacun de ces groupes comme une unique arête ayant probabilité d'être ouverte  $p^3$  dans  $\omega$ . Si on effectue cette construction non pas seulement pour  $w$  mais pour tous les sommets du chemin infini, on a construit un graphe  $Y'$  "isomorphe à  $\mathbb{L}^2$ " (quitte à oublier des sommets) mais dont les arêtes dans une direction sont dédoublées. Ainsi si on reprend  $\omega$  la percolation  $p$ -Bernoulli sur  $T \times \mathbb{L}$ , elle induit une percolation anisotrope de paramètres  $p$  et  $1 - (1 - p)(1 - p^3) > p$ .

Il existe donc par le résultat énoncé plus haut une valeur strictement inférieure à  $1/2$  de  $p$  telle que le graphe qu'on a construit admet une unique composante connexe infinie presque sûrement, et donc telle que  $T \times \mathbb{L}$  admette une unique composante connexe infinie.

Pour ce qui est du paramètre critique  $p_c$ , il est dans l'intervalle  $[1/(d + 1), 1/(d - 1)]$ . La borne inférieure nous est donnée par la proposition 4.8 et la borne supérieure par le fait que  $T \times \mathbb{L}$  contient un (et même une infinité) de sous-graphes isomorphes à l'arbre régulier de degré  $d$ , donc si  $p > 1/(d - 1)$ , ce sous-graphe admet presque sûrement une composante connexe infinie et donc  $T \times \mathbb{L}$  aussi. On peut ici aussi obtenir une inégalité

stricte pour la borne supérieure en utilisant des arêtes du reste du graphe. Prenons le sous-graphe  $Y$  induit par l'ensemble des sommets de  $T \times \mathbb{L}$  dont la deuxième coordonnée est 0 ; chaque sommet de cet arbre a  $d - 1$  arêtes incidentes s'éloignant de l'origine  $(o, 0)$ , c'est à dire dont l'autre extrémité en est plus éloignée, et une dont l'autre extrémité en est plus proche.

Pour chaque sommet  $u = (u_T, 0)$  de notre arbre, on va choisir une de ces arêtes s'éloignant de l'origine qu'on va appeler  $e_u$ . Par construction, si  $u, v \in Y$ ,  $u \neq v$ , alors  $e_u \neq e_v$  et pour que ces deux arêtes partagent un sommet, il faut que  $u$  soit l'extrémité de  $e_v$  ou  $v$  l'extrémité de  $e_u$ , et ainsi que les distances et l'origine de  $u$  et  $v$  aient différentes parités. Par conséquent, si l'on construit pour chaque sommet  $u = (u_T, 0)$  de  $Y$  l'évènement  $E_+^u := \{[(u_T, 0), (u_T, 1)], [(u_T, 1), (v_T, 1)], [(v_T, 1), (v_T, 0)]\} \subset \mathbf{E}(\omega)$  où  $v = (v_T, 0)$  est l'autre extrémité de  $e_u$ , et l'évènement  $E_-^u$  défini de la même manière mais en remplaçant 1 par  $-1$  ; puis qu'on définit l'évènement  $E^u$  comme égal à  $E_+^u$  si  $d_Y((o, 0), u)$  est pair et à  $E_-^u$  sinon, tous les  $E_u$  sont indépendants entre eux et indépendants de l'état des arêtes de  $Y$ . Ainsi on a comme plus haut dédoublé certaines des arêtes de  $Y$ , augmentant leur probabilité d'être ouverte ; en particulier si on reprend la preuve du corollaire 4.9, dans le processus de branchement, l'espérance de nombre d'enfants de tous les individus passé la première génération est strictement supérieure à  $(d - 1)p$  et donc on a une probabilité strictement inférieure à 1 d'extinction pour un certain paramètre  $p < 1/(d - 1)$ .

Récapitulons ce que nous savons sur les paramètres critiques de  $T \times \mathbb{L}$  :

**Théorème 9.8.** *Soit  $\omega$  une percolation  $p$ -Bernoulli sur  $T \times \mathbb{L}$  où  $T$  est un arbre régulier de degré  $d$ . Alors :*

- $p_c \in [1/(d + 1), 1/(d - 1)[$ ,
- $p_u \in [p_c, 1/2]$ , avec  $p_u \neq 1/2$  si  $d > 3$ .

On peut aussi conjecturer que lorsque  $d = 3$ , on a quand même  $p_c \neq 1/2$ , puisque par l'inégalité FKG, les  $E_x^n$  sont positivement corrélés (avec les mêmes notations que plus haut, où  $x$  est l'unique sommet voisin de  $w$  qui n'est pas sur le chemin infini choisi).

## Références

- [FKG71] C. M. FORTUIN, P. W. KASTELEYN et J. GINIBRE. « Correlation Inequalities on Some Partially Ordered Sets ». In : *Communications in mathematical physics* 22.2 (1971), p. 89-103. ISSN : 0010-3616.
- [Kes80] Harry KESTEN. « The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice Equals  $1/2$  ». In : *Communications in mathematical physics* 74.1 (1980), p. 41-59. ISSN : 0010-3616.
- [Kes82] Harry KESTEN. « Percolation Theory for Mathematicians / Harry Kesten ». In : *Percolation Theory for Mathematicians*. Progress in Probability and Statistics. Boston : Birkhäuser, 1982. ISBN : 3-7643-3107-0.
- [BK89] R. M. BURTON et M. KEANE. « Density and Uniqueness in Percolation ». In : *Commun.Math. Phys.* 121.3 (1<sup>er</sup> sept. 1989), p. 501-505. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01217735](https://doi.org/10.1007/BF01217735). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01217735>.

- [NG90] Charles M. NEWMAN et Geoffrey R. GRIMMETT. « Percolation in Infinity + 1 Dimensions ». In : 1990.
- [Ben+99] Itai BENJAMINI, Russell LYONS, Yuval PERES et Oded SCHRAMM. « Critical Percolation on Any Nonamenable Group Has No Infinite Clusters ». In : *The Annals of probability* 27.3 (1999), p. 1347-1356. ISSN : 0091-1798.
- [HP99] O HÄGGSTRÖM et Y PERES. « Monotonicity of Uniqueness for Percolation on Cayley Graphs : All Infinite Clusters Are Born Simultaneously ». In : *Probability theory and related fields* 113.2 (1999), p. 273-285. ISSN : 0178-8051.
- [LS99] Russell LYONS et Oded SCHRAMM. « Indistinguishability of Percolation Clusters ». In : *The Annals of probability* 27.4 (1999), p. 1809-1836. ISSN : 0091-1798.
- [Gri13] Geoffrey GRIMMETT. *Percolation*. T. 321. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 2013. ISBN : 0-387-96843-1.
- [Li 13] LI JI-HUANG. *Phase de Non-Unicité de La Percolation, Sous La Direction de Vincent Beffara*. 13 sept. 2013.
- [LP16] Russell LYONS et Yuval PERES. In : *Probability on Trees and Networks*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. New York (N.Y.) : Cambridge University Press, 2016. ISBN : 978-1-107-16015-6.
- [Dum18] Hugo DUMINIL-COPIN. *Introduction to Bernoulli Percolation*. Oct. 2018. URL : <https://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf>.
- [Wik21] WIKIPÉDIA. *Graphe de Cayley*. In : *Wikipédia*. 27 avr. 2021. URL : [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Graphe\\_de\\_Cayley](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Graphe_de_Cayley).