Autour du problème de Plateau

Hervé Pajot

Institut Fourier (Université de Grenoble Alpes)

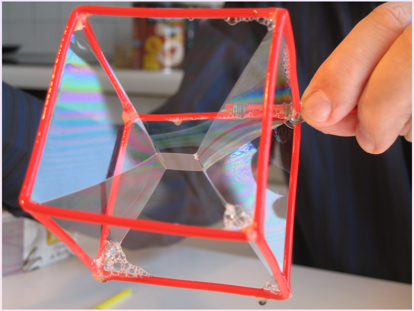
16 mai 2018

Joseph Plateau (1801-1883)

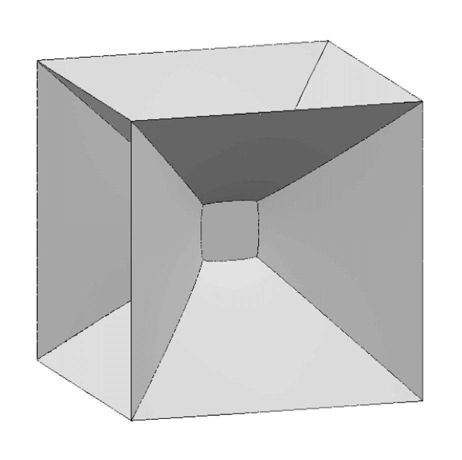
Le problème de Plateau

Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ *un contour (de dimension* 1*). Quelle est l'aire minimale d'une surface* $S \subset \mathbb{R}^3$ *telle que le bord de* S *soit* C *?*

Films de Savon



Films de Savon



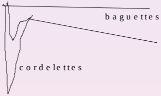
Comment faire des bulles de savon ?

Le Laboratoire de Spectrométrie Physique présente :

la recette des bulles géantes

Recette, à adapter librement :

- **1 volume de produit vaisselle**
- **1/2 volume de sucre en poudre**
- **10 volumes d'eau s'il fait humide 20 volumes s'il fait sec**



- **Prendre deux baguettes rigides** d'environ un mètre de long
- **Faire une boucle en cordelette** avec deux lacets de chaussure un long (1 m 80), un court (1 m)

La méthode :

• **mettre la sauce au fond d'un récipient**	sans agiter, sinon ça mousse
• **tremper complètement la cordelette**	baguettes jointes (boucle fermée)
• **ressortir les cordelettes**	bien les laisser s'égoutter
• **vérifier que le film de savon est formé**	en écartant un peu les baguettes
• **ouvrir entièrement la boucle**	doucement, sans casser le film
• **gonfler la bulle**	soit en reculant, soit en avançant
• **fermer la bulle**	resserrer les baguettes en les remontant
• **la laisser s'envoler**	et rêver...

Jesse Douglas (1897-1965)

Une première réponse

Théorème (Douglas, Garnier, Radó, ~ 1930 **et Osserman, 1970) :**
Si C est une courbe de Jordan de $\mathbb{R}^n$, il existe une application continue $\phi : \overline{D(0,1)} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ telle que ϕ est conforme et harmonique en dehors d'un ensemble isolé de singularités ET la restriction de ϕ à C donne une paramétrisation de C. En fait, $\phi(\overline{D(0,1)})$ est une surface minimale de bord C et, si C est lisse, peut être choisie d'aire minimale parmi toutes les immersions du disque unité.

Un peu de calcul des variations !

La méthode directe en calcul des variations

Supposons que l'on souhaite minimiser une fonctionnelle F de la forme $F(\Omega) = A(\partial\Omega) + I(\Omega)$ parmi tous les domaines Ω de $\mathbb{R}^n$ dans une classe $\mathcal{D}$ où $A(\partial\Omega)$ est l'aire du bord de Ω (ou le périmètre de Ω) et $I(\Omega)$ est une énergie la forme $I(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega f(x)dx$ (modulo des contraintes).

Si on note m le minimum de F, l'idée est de considérer une suite de domaines Ω_j dans $\mathcal{D}$ tels que $F(\Omega_j) \leq m + 1/j$, puis par compacité de $\mathcal{D}$ de montrer que la suite (Ω_j) converge vers un domaine $\Omega \in \mathcal{D}$. Enfin, pour obtenir que $F(\Omega) = m$, il nous faut la semi-continuité inférieure de notre notion d'aire sur $\mathcal{D}$, c'est à dire $\liminf\limits_{j\to+\infty} A(\Omega_j) \geq A(\Omega)$.

Problème : Trouver $\mathcal{D}$ (avec une bonne topologie) et A ! On peut aussi espérer que les domaines "lisses" sont (denses) dans $\mathcal{D}$.

Segmentation d'images

La fonctionnelle de Mumford-Shah

Considérons un rectangle Ω dans $\mathbb{C}$ (l'écran) et une fonction bornée $g : \Omega \to [0,1]$ (le niveau de gris de l'image de départ).

Pour formaliser le problème de segmentation d'image, D. Mumford et J. Shah ont introduit la fonctionnelle suivante

$$J(u,K) = \int_{\Omega \setminus K} |u-g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Le but est de trouver inf $J(u,K)$ sur tous les couples/compétiteurs (u,K) avec K fermé dans Ω et u dans $C^1(\Omega \setminus K)$. Des minimiseurs existent.

Conjecture : Un ensemble minimiseur K est formé d'un nombre fini de courbes de classe C^1 qui, quand elles s'intersectent, le font par 3 avec des angles de $2\pi/3$.

Un peu de théorie géométrique de la mesure !

Mesure extérieure

.

Une mesure extérieure sur un espace métrique (X, d) est une application $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ telle que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Si (A_i) est une famille (au plus) dénombrable dans X et si $A \subset \bigcup_i A_i$, $\mu(A) \leq \sum_i \mu(A_i)$.

On dit que $A \subset X$ est μ-mesurable si tout tout $B \subset X$, $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$. L'ensemble des ensembles μ-mesurables forme une tribu sur X. Une mesure μ est borélienne si les boréliens de X sont μ-mesurables.

Construction de Carathéodory

.

On se donne une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de l'espace métrique (X, d) (les recouvrements admissibles) et une application (la jauge) $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ qui mesure la taille des éléments de $\mathcal{F}$. On suppose que

(i) Pour tout $\delta > 0$, il existe une famille $(F_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in I$, $\mathrm{diam} F_i \leq \delta$ et $X = \bigcup_{i \in I} F_i$.

(ii) Pour tout $\delta > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $\rho(F) \leq \delta$ et $\mathrm{diam}(F) \leq \delta$.

On pose pour $0 < \delta \leq \infty$ et $A \subset X$,

$$\Phi_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_i \rho(E_i); A \subset \cup_i E_i, E_i \in \mathcal{F}, \mathrm{diam}(E_i) \leq \delta \right\}$$

puis

$$\Phi(A) = \sup_{\delta > 0} \Phi_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \Phi_\delta(A).$$

Sous les conditions précédentes, Φ est une mesure borélienne.

Mesures et dimension de Hausdorff

.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $s \in [0, n]$.

La s-mesure de Hausdorff de E est définie par

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

où $\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_i \alpha(s)(\mathrm{diam} F_i/2)^s ; E \subset \cup_i F_i, \mathrm{diam}(F_i) \leq \delta \right\}$.

Les mesures de Hausdorff ne sont semi-continues inférieurement !

On définit la dimension de Hausdorff de E par

$$Hdim(E) = \sup\{s; \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = inf\{t; \mathcal{H}^t(E) = 0\}.$$

.

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit que l'application $f : X \to Y$ est lipschitzienne s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que $d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)$ dès que x, $y \in Y$.

On pose

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}.$$

Exemple : On fixe $x_0 \in X$. Alors, $f_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ définie par $f_{x_0} = d(x, x_0)$ est lipschitzienne.

Remarque : Si f est lipschitzienne, $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (Lip(f))^s \mathcal{H}^s(E)$.

.

Théorème (Rademacher, 1919) : *Toute application lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est presque partout différentiable.*

Théorème (Kirszbraun, 1934) : *Toute applications lipschitzienne $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet une extension lipschitzienne $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $Lip(g) = Lip(f)$.*

Théorème (Whitney, 1934) : *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$ et $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; Df(x) \neq D\tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$.*

Ensembles rectifiables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $s \in \mathbb{N}$. On dit que E est s-rectifiable s'il existe une famille (dénombrable) d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ et un ensemble $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{H}^s(E_0) = 0$ tels que $E \subset E_0 \cup \left(\bigcup_j f_j(\mathbb{R}^s)\right)$. D'un autre côté, un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est purement non s-rectifiable si pour tout ensemble s-rectifiable $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(F \cap E) = 0$.

Lemme : Si $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, il existe un ensemble s-rectifiable E_{rect} et un ensemble purement non s-rectifiable $E_{nonrect}$ tels que $E = E_{rect} \cup E_{nonrect}$.

Plans tangents approximatifs

Si P est un s-plan (vectoriel) dans $\mathbb{R}^n$, on note $C(x, P, \delta)$ le cône $C(x, P, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(y - x, P) < \delta |y - x|\}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que le plan P est un plan tangent approximatif à E en $x \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $0 < \delta < 1$, on a $\lim_{r \to 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r) \setminus C(x, P, \delta)) = 0$.

Théorème : *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble $\mathcal{H}^s$-mesurable avec $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Alors, E est s-rectifiable si et seulement pour tout $\mathcal{H}^s$-presque tout $x \in E$, il existe un s-plan tangent approximatif en x à E.*

Le problème de Plateau par la théorie des courants.

Courants

On note $\mathcal{D}^s$ l'ensemble des s-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^∞ et à support compact. L'espace dual de $\mathcal{D}^s$ est l'espace des courants s-dimensionnels et se note $\mathcal{D}_s$.

On munit $\mathcal{D}_s$ de la topologie faible *. Ainsi, $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}_s$ si et seulement $T_j(\omega) \to T(\omega)$ pour toute forme différentielle ω dans $\mathcal{D}^s$.

Le support $\operatorname{supp} T$ d'un courant T est le plus petit fermé F tel que $\operatorname{supp}(\omega) \cap F = \emptyset \Longrightarrow T(\omega) = 0$.

Courants rectifiables

Soit E un ensemble s-rectifiable dans $\mathbb{R}^n$.

En $\mathcal{H}^s$-presque tout $x \in E$, il existe un s-plan tangent approximatif P_x que l'on peut le munir d'une base orthonormée $(e_1^x, ..., e_s^x)$ qui définit une orientation de P_x. Posons $T_E(\omega) = \displaystyle\int_E \omega(e_1^x, ..., e_s^x) d\mathcal{H}^s(x)$.

Alors, $T_E \in \mathcal{D}_s$ et s'appelle un courant rectifiable.

Bord d'un courant

Si $T \in \mathcal{D}_s$, on définit son bord $\partial T \in \mathcal{D}_{s-1}$ par $\partial T(\omega) = T(d\omega)$ pour toute forme $\omega \in \mathcal{D}^{s-1}$.

Si S est une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord ∂S est une courbe lisse, la formule de Stockes donne pour toute forme ω

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

Comme $d \circ d = 0$, on a $\partial \circ \partial = 0$.

On dit qu'un courant T est intégral si T est rectifiable et son bord ∂T l'est aussi (ce qui n'est pas automatique). On notera $\mathcal{R}_s$ (respectivement $\mathcal{I}_s$) l'espace des courants rectifiables de $\mathcal{D}_s$ (respectivement des courants intégraux).

Normes d'un courant

On définit deux (semi)-normes sur l'espace des courants $\mathcal{D}_s$:

1) Masse d'un courant : $M(T) = \sup\{T(\omega), |||\omega||| \leq 1\}$

2) Norme plate d'un courant :
$\mathcal{F}(T) = \inf\{M(A) + M(B); T = A + \partial B, A \in \mathcal{R}_m, B \in \mathcal{R}_{m+1}\}$.

La masse d'un courant rectifiable associé à un ensemble s-rectifiable E est $\mathcal{H}^s(E)$.

Compacité et solution du problème de Plateau

Théorème (Federer-Fleming, $\sim$ 1960) : *Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et si $C \geq 0$ est un réel, l'ensemble*

$$\{T \in \mathcal{I}_s; Supp T \subset F, M(T) \leq C, M(\partial T) \leq C\}$$

est compact (pour $\mathcal{F}$).

On en déduit une solution au problème de Plateau en termes de courants.

Théorème (Federer-Fleming, $\sim$ 1960) : *Soit $B \in \mathcal{R}_{s-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $\partial B = 0$. Alors, il existe un courant rectifiable minimisant la masse $S \in \mathcal{R}_s$ tel que $\partial S = B$, c'est à dire que pour tout $T \in \mathcal{R}_s$ tel que $\partial T = B$, $M(S) \leq M(T)$.*

Problème : Que se passe-t-il pour la norme plate ?

Régularité des courants minimaux

On dit qu'un s-courant S dans $\mathbb{R}^n$ minimise la masse si pout tout $T \in \mathcal{D}_s$ avec $\partial T = \partial S$, $M(S) \leq M(T)$.

Théorème (Almgren, 1983) : *Tout s-courant rectifiable dans $\mathbb{R}^n$ minimisant la masse est une variété lisse (dans son intérieur) hors d'un ensemble de singularités de dimension de Hausdorff $\leq s - 2$.*

Le problème de Plateau par la théorie des varifolds.

Varifolds rectifiables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $G_s(\Omega) = \Omega \times G_{n,s}$ où $G(n,s)$ est la grassmannienne des s-plans de $\mathbb{R}^n$. Un s-varifold est alors une mesure de Radon V sur l'espace $G_s(\Omega)$.

La masse (ou plutôt mesure masse) associée à V est la mesure $||V||$ définie par $||V||(B) = V(\Pi^{-1}(B))$ pour tout borélien B de Ω. Ici, $\Pi : G_s(\Omega) \to \Omega$ est la projection canonique, c'est à dire $\Pi(x,P) = x$ pour $x \in \Omega$, $P \in G_{n,s}$.

Un s-varifold rectifiable est défini par, si $A \subset G_s(\Omega)$,

$$V(A) = \mathcal{H}^s(E \cap \{x; (x, P_x) \in A\}).$$

où E est un ensemble s-rectifiable et P_x est le s-plan tangent approximatif en x à E. Dans ce cas, $||V||$ est la restriction de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ à E.

Varifolds stationaires

La formulation du problème de Plateau dans ce cadre est différente de celle pour les courants (car il n'existe pas de notion claire de bord d'un varifold par exemple) mais est proche de celle des surfaces minimales (qui sont les surfaces de courbure moyenne nulle).

On dit qu'un s-varifold V est stationnaire si sa variation première vérifie $\delta V = 0$, c'est à dire que V est un point critique pour la masse en un certain sens. Il en résulte que les varifolds stationnaires englobent les courants rectifiables d'aire minimale par exemple. Il existe ainsi des théorèmes de compacité et de régularité pour de tels varifolds.

Le problème de Plateau est-il résolu ?

Minimiseurs d'Almgren

Soit E un ensemble fermé dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Si B est une boule (fermée) dans U, un compétiteur de E dans B est donné par $F = \phi(E)$ où $\phi : U \to U$ est lipschitzienne $\phi(B) \subset B$ et $\phi(x) = x$ si $x \in U \setminus B$.

On se donne une fonction (jauge) $h : [0 + \infty[\to [0, +\infty[$ avec $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

On dit que E est un (presque)-minimiseur d'Almgren (par rapport à la jauge h) si pour toute boule fermée B dans U de rayon $R > 0$, $\mathcal{H}^s(E \cap B) \leq \mathcal{H}^s(F \cap B) + h(R)R^s$ pour tout compétiteur F de E dans B.

Problèmes : Existence et régularité des minimiseurs.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(E) < +\infty$. Si B est une boule (fermée) dans U, un compétiteur de E dans B est un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que F coincide avec E sur $\mathbb{R}^n \setminus B$ et F sépare x et y si x, $y \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cap B)$ sont dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus (E \cap B)$.

On dit que E est un minimiseur de Mumford-Shah si pour toute boule fermée B, $\mathcal{H}^s(E \cap B) \leq \mathcal{H}^s(F \cap B)$ pour tout compétiteur F de E dans B.

Problèmes : Existence et régularité des minimiseurs.

Minimiseurs au sens d'Almgren-David

On se donne des composantes (fermés) de bord Γ_0, ..., Γ_N et un "compétiteur initial " (fermé) E_0 dans $\mathbb{R}^n$.

Un fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ est dans $\mathcal{F}(E_0)$ si $E = \phi_1(E_0)$ où $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ vérifie

(i) $(t,x) \to \phi_t(x)$ est continue sur $[0,1] \times E_0$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\phi_0(x) = x$ si $x \in E_0$.

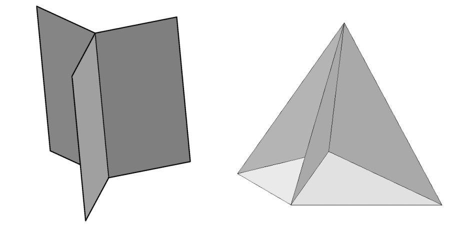
(iii) Si $0 \leq j \leq N$ et si $x \in E_0 \cap \Gamma_j$, $\phi_t(x) \in \Gamma_j$.

(iv) ϕ_1 est lipschitzienne.

Le but est d'étudier $\delta(E_0) = \inf_{E\in\mathcal{F}(E_0)} \mathcal{H}^s(E)$.
Problèmes : Existe-t-il un minimiseur de $\delta(E_0)$? Si oui, quelle est sa géométrie ?

Le théorème de régularité de Jean Taylor (1976)

Si $E \subset \mathbb{R}^3$ est un minimiseur de dimension 2, alors E est localement C^1-équivalent à un plan ou à



Bibliographie commentée

F. Almgren, *Plateau's problem : An invitation to varifold geometry*, American Mathematical Society.

P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press.

F. Morgan, *Geometric measure theory : a beginner's guide*, Academic Press.

H. Pajot et E. Russ, *Analyse dans les espaces métriques*, collection Savoirs Actuels (EDP Sciences).

R. Osserman, *A survey on minimal surfaces*, Dover.