M1 Mathématiques générales

Sujets de TER 2022-2023

Mode d'emploi

On postera au plus tard **jeudi 1er décembre à 23h59** dans le salon privé de l'utilisateur **Didier Piau** sur le serveur **Discord** de la filière Mathématiques, un message indiquant **les numéros des quatre sujets** sur lesquels on souhaite travailler, écrits dans l'ordre décroissant de préférence (ou bien un message indiquant une absence de préférence).

Recopier les titres des sujets ou ajouter des formules de politesse est inutile. Dans l'immense majorité des cas, le message contiendra donc exclusivement quatre numéros de sujets écrits sur une même ligne et séparés par des espaces simples.

L'exception est le cas où une poursuite d'études autre qu'en M2 Agrégation est envisagée, par exemple en M2 Cybersecurity ou en M2 ORCO, et où on souhaite travailler sur un sujet en lien avec cette poursuite d'études ; alors, le rappeler dans le message.

Titres des sujets

1 Aimantation en dimension 3

Le modèle d'Ising a pour but d'expliquer comment certains matériaux (dits *ferromagnétiques*) peuvent conserver leur aimantation à basse température et la perdre quand on les chauffe ; c'est l'un des modèles les plus étudiés en physique statistique. Il est défini comme une mesure de probabilité sur $\Omega = \{+1, -1\}^V$ où V désigne l'ensemble des sommets d'un graphe fini, typiquement un cube dans $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$, en fixant que la probabilité d'une configuration σ est proportionnelle à $\exp\left(\beta \sum \sigma_i \sigma_j\right)$, où la somme est prise sur les paires de voisins et β est un paramètre représentant l'inverse de la température.

On peut étendre le modèle à $\mathbb{Z}^d$ tout entier et définir l'*aimantation* $m(\beta)$ comme la limite de l'espérance de $\sigma_0 \sigma_x$ quand $\|x\| \to \infty$. Il n'est pas très compliqué de montrer que m est une fonction croissante de β, nulle pour $\beta < \beta_c$ et positive pour $\beta > \beta_c$ pour une certaine *valeur critique* $\beta_c \in \mathbb{R}_+^*$, et continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{\beta_c\}$.

Une question majeure du domaine est celle de la continuité de m en β_c, autrement dit celle de savoir si la magnétisation disparaît de manière continue ou brutale quand la température augmente et dépasse β_c^{-1}. Cette continuité est connue depuis longtemps en dimensions 2 et $d \geqslant 4$, mais le cas $d = 3$ n'a été démontré que récemment ; la preuve utilise une représentation graphique des corrélations du modèle sous forme de *courants aléatoires*.

Il s'agira de comprendre cette preuve de la continuité, ce qui peut se faire sans prérequis autres que les bases de la théorie des probabilités au niveau L3.

Bibliographie

Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin, Vladas Sidoravicius (2015), Random Currents and Continuity of Ising Model's Spontaneous Magnetization, *Comm. Math. Phys.* 334, 719-742.
http://dx.doi.org/10.1007/s00220-014-2093-y

Sacha Friedli, Yvan Velenik (2017), *Statistical Mechanics of Lattice Systems : a Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge.

2 Bornes pour les sous-groupes finis du groupe linéaire

Comme on le voit dès le cas $n = 1$, les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peuvent être de taille arbitraire ; par contre la taille des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ est bornée en fonction de n (par exemple si une matrice est d'ordre premier, en considérant son polynôme minimal on trouve que son ordre est au plus $n + 1$) : on établira la borne multiplicative de Minkowski (1877) et son optimalité. À l'aide de la théorie des caractères, on montrera aussi le théorème de Schur (1905) qui en étend la validité aux sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de traces rationnelles.

Par ailleurs la structure des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est contrainte par le théorème de Jordan (1878), qui énonce l'existence d'un entier $D(n)$ tel que tout sous-groupe fini contienne un sous-groupe distingué *abélien* d'indice au plus $D(n)$. En suivant la méthode de Frobenius on établira une telle borne explicite. On pourra s'intéresser au cas $n = 2$, tel que $D(2) = 60$.

Prérequis

Cours d'Algèbre de L3 et de M1. Il sera utile de suivre l'UE Théorie de Galois du M1.

Bibliographie

Jean-Pierre Serre (2016), *Finite groups : an introduction*, International Press : chapitre 9.

Robert M. Guralnick, Martin Lorenz (2006), Orders of finite groups of matrices, *Contemporary Mathematics* 420, 141–162.
https://arxiv.org/abs/math/0511191

Richard Antetomaso (2014), Autour du théorème de Jordan sur les sous–groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, *RMS* 124 (3).

Sujet d'agrégation *Mathématiques Générales* 2003, partie II.
https://agreg.org/index.php?id=archives

3 Calculs de bases de Gröbner

Une base de Gröbner d'un idéal $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ est une famille de générateurs de I avec de bonnes propriétés, permettant en particulier de calculer efficacement dans le quotient $K[X_1, \ldots, X_n]/I$.

On se propose de comprendre les propriétés d'une telle base ainsi que l'algorithme de calcul de Buchberger ; dans un deuxième temps, on pourra s'intéresser aux améliorations de cet algorithme et en particulier à l'utilisation de signatures pour diminuer le nombre de réductions à zéro.

Prérequis

Cours d'algèbre du premier semestre.

Bibliographie

David A. Cox, John Little, Donal O'Shea (2015), *Ideals, Variety and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

Till Stegers (2005), *Faugère's F5 Algorithm Revisited*, Master's thesis, Technische Universität Darmstadt, revised version 2007.
https://eprint.iacr.org/2006/404

4 Classification des surfaces

La première preuve rigoureuse du théorème de classification des surfaces fut donnée par Max Dehn et Poul Heegaard en 1907, sous l'hypothèse de l'existence d'une triangulation (c'est-à-dire en supposant que la surface puisse être découpée en un nombre fini de triangles dont les intersections se font selon les arêtes et les sommets). La preuve fut définitivement complète en 1925 lorsque Tibor Radó démontra l'existence de telles triangulations pour les surfaces.

Ce théorème est assez surprenant puisque son énoncé est relativement simple alors que sa démonstration est longue et nécessite des outils mathématiques variés. Le but du travail proposé est de présenter le théorème de classification pour les surfaces compactes sans bord, et d'en donner une démonstration sous l'hypothèse de l'existence de triangulations.

Prérequis

Algèbre et topologie de L3.

Bibliographie

André Gramain (1971), *Topologie des surfaces*, PUF.

Site web Analysis Situs. http://analysis-situs.math.cnrs.fr/

William S. Massey (1967), *Algebraic Topology, An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol 56, Springer.

5 Comment définir la courbure d'un groupe ? Avec des probabilités !

La courbure d'un cercle de rayon R vaut $1/R$. De façon plus générale, on peut définir ce qu'est la courbure d'un objet lisse continu mais ce n'est pas ce qui va nous intéresser ici. Voici une question : comment définir une notion intéressante de courbure sur un groupe fini G donné ?

On se propose d'étudier la notion de courbure « à la Ollivier », qui s'applique bien au contexte des groupes finis et dont voici deux aspects :

— Cette notion utilise des marches aléatoires sur des groupes.

— Cette notion repose sur l'idée que, si la courbure d'un objet est positive, si on considère deux petites boules B_1 et B_2 dans cet objet et X_1 et X_2 deux points tirés uniformément dans B_1 et B_2, alors, en moyenne, la distance entre X_1 et X_2 est plus petite que la distance entre le centre de B_1 et le centre de B_2.

L'objectif sera de comprendre ces deux aspects.

Prérequis

Théorie des groupes de licence. Cours de Probabilités du premier semestre de M1.

Bibliographie

Yann Ollivier (2010), A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 57, 343-381.
https://projecteuclid.org/ebook/download?urlId=10.2969/aspm/05710343

Norbert Peyerimhoff (2019), Curvature notions on graphs, *LMS Undergraduate Summer School*, University of Leeds.
https://www.maths.dur.ac.uk/users/norbert.peyerimhoff/

6 Comment l'immigration vient en aide aux arbres

Les processus de Bienaymé-Galton-Watson, aussi appelés processus de branchement, sont des modèles de reproduction de population. Historique (Wikipedia) :

> *À l'origine, ce modèle a été introduit par Bienaymé en 1845 et indépendamment par Galton en 1873 en vue d'étudier la disparition des patronymes. Supposons que chaque adulte mâle transmette son patronyme à chacun de ses enfants. Supposons également que le nombre d'enfants de chaque homme soit une variable aléatoire entière (et que la distribution de probabilité soit la même pour tous les hommes dans une lignée). Alors, un patronyme dont les porteurs ont un nombre d'enfant inférieur à 1 en moyenne est amené à disparaître. Inversement, si le nombre moyen d'enfants est stritement supérieur à 1, alors la probabilité de survie de ce nom est non nulle et en cas de survie, le nombre de porteurs du patronyme connaît une croissance exponentielle.*

Soit μ la loi de reproduction, m sa moyenne et g sa fonction génératrice.

Théorème de criticalité (Bienaymé, 1845) : *La probabilité d'extinction q dépend de la loi de reproduction μ comme suit.*

— *Cas sous-critique : si $m < 1$, alors $q = 1$.*
— *Cas critique : si $m = 1$ et $\mu \neq \delta_1$, alors $q = 1$.*
— *Cas sur-critique : si $m > 1$, alors $q < 1$ est le plus petit point fixe de g et le seul dans $[0, 1[$.*

En notant Z_n l'effectif de la génération n, on constate que Z_n/m^n est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire W. On se demande alors si $P(W = 0) = q$. Ce n'est pas toujours le cas ainsi que l'énonce le théorème suivant.

Théorème de Kesten-Stigum (1966) : *On suppose que $m > 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $P(W = 0) = q$

2. $E[W] = 1$
3. $\sum_{k \geqslant 2} (k \log k)\, \mu(k) < +\infty$

On pourra étudier plusieurs preuves de ce résultat, probabilistes ou analytiques, l'une de ces preuves étant basée sur la notion de processus de branchement avec immigration. On établira aussi des résultats plus fins sur les vitesses de convergence de $P(Z_n \neq 0)$ vers 0 dans les cas sous-critique et critique.

Prérequis

Le cours de Probabilités du premier semestre.

Bibliographie

Russell Lyons, Robin Pemantle, Yuval Peres (1995), Conceptual proofs of $L \log L$ criteria for mean behavior of branching processes, *Annals of Probability* 23, 1125–1138.
https://rdlyons.pages.iu.edu/#k-s6

Russell Lyons, Yuval Peres (2016), *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press.
https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/

Søren Asmussen, Heinrich Hering (1983), *Branching Processes*, Birkhäuser, Basel.

7 Complexité, NP-difficulté, problème du commis voyageur et autres

On se penchera sur la question suivante : quelle est la difficulté de problèmes mathématiques en principe résolus par un algorithme connu ? La difficulté d'un problème sera pour nous le taux de croissance de la fonction $T(n)$ qui donne le nombre d'opérations de base nécessaires à sa résolution pour des données initiales de taille n.

Parmi les problèmes qui pourront être envisagés, citons :

- Le problème du commis voyageur : étant donné un groupe de villes et les distances entre elles, trouver le plus court chemin qui visite chaque ville (ou dans sa version décisionnelle, dire s'il existe un tel chemin de longueur plus petit qu'une borne B donnée).
- Le problème du cycle hamiltonien : étant donné un graphe, contient-il un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle qui passe par tous les points exactement une fois ?
- Le problème du sac à dos : étant donné un ensemble d'objets, ayant chacun un poids et une valeur, et un sac à dos qui ne supporte pas plus qu'un poids donné, comment maximiser la valeur des objets dans le sac à dos ?
- Le problème du calcul du nombre chromatique d'un graphe.

Ces problèmes (ainsi que d'autres qui pourraient être abordés selon le temps et les envies) ont la particularité d'être NP-complets, une classe importante de problèmes.

Une question Q à résoudre, est dite NP-complète si et seulement si :
- il est possible de vérifier en temps polynomial qu'une solution de Q est correcte,
- tout problème dont il est possible de vérifier en temps polynomial qu'une solution est correcte, peut être réduit à Q en temps polynomial.

On commencera par donner des définitions précises des classes de problèmes P, NP et NP-complets, ce qui nécessitera de se familiariser avec la notion de machine de Turing. Ensuite, on démontrera que certains des problèmes mentionnés ci-dessus sont NP-complets, ce qui passera par le théorème de Cook et Levin affirmant que le problème de la satisfiabilité booléenne est NP-complet. Enfin, si le temps et l'envie le permettent, on pourra regarder la difficulté algorithmique de versions approchées de certains de ces problèmes.

Prérequis

Aucun.

Bibliographie

Stephen Cook (1971), The complexity of theorem proving procedures, *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 151-158.
https://www.cs.toronto.edu/~sacook/homepage/1971.pdf

Michael R. Garey, David S. Johnson (1979), *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company.

Richard Karp (1972), Reducibility Among Combinatorial Problems, *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, Springer, 85-103.

8 Déplaçons des masses sur un objet pour montrer... qu'il n'existe pas

Lorsqu'on étudie des objets géométriques aléatoires (par exemple, des graphes aléatoires), une technique très utile est la technique dite du **transport de masse**. Cette technique permet de prouver des résultats négatifs du type « une certaine propriété géométrique P est fausse presque sûrement ». Par exemple, P peut être « l'objet géométrique considéré comprend beaucoup de grandes composantes connexes ».

La structure du raisonnement du transport de masse ressemble à ceci :

1. Je suppose que P est vraie pour un objet géométrique aléatoire donné.
2. Je place une masse à de nombreux endroits de cet objet.
3. Je déplace ces masses d'une façon bien choisie.

4. Je prouve que, après déplacement des masses, il y a à la fois une masse finie à chaque endroit de l'objet et une masse infinie quelque part.
5. Je remarque que c'est absurde.

Le but de ce TER sera de se familiariser avec certains des objets géométriques aléatoires concernés et de comprendre ce que cet étonnant raisonnement du transport de masse peut bien signifier mathématiquement.

Prérequis

Probabilités de L3.

Bibliographie

Olle Häggström (1999), Invariant percolation on trees and the mass-transport method, *Bulletin of the International Statistical Institute* LVIII, Proceedings 52nd ISI session.
https://www.stat.fi/isi99/proceedings/arkisto/varasto/hagg0018.pdf

Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres, Oded Schramm (1999), Critical percolation on any nonamenable group has no infinite clusters, *Ann. Probab.* 27 (3), 1347-1356.
https://rdlyons.pages.iu.edu/#death

9 Espaces topologiques finis

Même si elle peut paraître anecdotique à première vue, la classe des espaces topologiques finis est en fait très riche, par exemple d'un point de vue homotopique. Nous nous intéresserons aux groupes fondamentaux de ces espaces et nous verrons que tout groupe admettant une présentation finie est le groupe fondamental d'un espace topologique fini.

En fonction du temps et de l'avancée du travail, nous pourrons aussi étudier plus en profondeur ces espaces topologiques finis, en particulier du point de vue de la topologie algébrique.

Bibliographie

Jonathan A. Barmak (2011), *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/barmak2.pdf

Michael C. McCord (1966), Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces, *Duke Mathematical Journal* 33, 465–474.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/mccord1.pdf

Robert E. Stong (1966), Finite topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 123, 325–340.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/stong2.pdf

10 Estimations gaussiennes pour des marches aléatoires sur des groupes

Soit $(x_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, vérifiant $P(x_k = 1) = P(x_k = -1) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $X_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$. Quel est le comportement de X_n quand n devient grand ?

On peut interpréter X_n comme donnant la position d'un-e marcheur-se sur $\mathbb{Z}$ qui, à chaque instant n, passe de sa position à un entier voisin, avec la même probabilité d'aller à droite ou à gauche, et ce indépendamment des mouvements précédents. En d'autres termes, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Si, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$, on note $p_n(0, x)$ la probabilité, partant de 0, d'arriver en x à l'étape n, alors on peut vérifier de façon élémentaire que, si $|x| \leqslant n$ et $x \equiv n \pmod 2$,

$$\frac{C_2}{\sqrt{n}} e^{-(\ln 2)\frac{x^2}{n}} \leqslant p_n(0, x) \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

L'objectif sera de montrer cette estimation, et plus généralement d'obtenir des estimations de cet ordre pour des marches aléatoires dans des groupes engendrés par une partie finie.

Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure.

Bibliographie

Alexander Grigor'yan (2018), *Introduction to analysis on graphs*, University Lecture Series 71, Amer. Math. Soc.

W. Hebisch, L. Saloff-Coste (1993), Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, *Ann. Probab.* 21 (2), 673-709.
https://pi.math.cornell.edu/~lsc/papers/gauss-aop.pdf

11 Fonctions elliptiques

I. Fonctions elliptiques de Weierstrass : définition et propriétés de la fonction de Weierstrass $\wp$ de période (ω_1, ω_2) ; diverses représentations seront proposées ; équation différentielle et intégrales elliptiques de Weierstrass associées.

II. Intégrales elliptiques et fonctions elliptiques de Jacobi : on étudie ici la méthode de Jacobi par inversion d'intégrale elliptique pour obtenir des fonctions elliptiques ; étude du système de fonctions elliptique `sn`, `cn`, `dn`.

III. Comparaison des deux approches : on pourra comparer les deux approches en termes de pôles et de zéros, et trouver un lien direct entre les fonctions de Weierstrass et de Jacobi.

Bibliographie

Jacques Douchet (2017), *Analyse complexe*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Jacques Godement (2003), *Analyse mathématique IV. Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires*, Springer.

12 Groupes de réflexions finis

Étant donné un espace euclidien E, ses groupes de réflexions finis sont les groupes finis engendrés par des réflexions de E, c'est-à-dire des symétries orthogonales par rapport à des hyperplans de E. Les groupes diédraux en dimension 2, comme le groupe des permutations des coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, en sont des exemples. L'étude générale de tels groupes W est intimement liée à leur action sur les *systèmes de racines* de E : ce sont certaines configurations finies de vecteurs satisfaisant des propriétés géométriques, comme l'invariance par les réflexions de W.

L'étude géométrique correspondante nous amènera à décrire W comme engendré par ses *réflexions simples* s_α, celles-ci satisfaisant entre elles les seules *relations de Coxeter* $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$.

Cette présentation du groupe W est codée par le *graphe de Coxeter* de W. On lui associera une forme bilinéaire qui permet de classifier les groupes de réflexions à isomorphisme près. On décrira les systèmes de racines associés et l'ordre du groupe W.

Prérequis

Algèbre bilinéaire de L2, cours d'Algèbre de L3 sur les groupes.

Bibliographie

James Humphreys (1990), *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge, chapitres 1 et 2.

13 Introduction à la théorie des modules et applications

Soit A un anneau unitaire (non nécessairement commutatif). Un *A-module* est la structure mathématique obtenue lorsque l'on remplace le corps de base K par A dans la définition d'un K-espace vectoriel.

Autrement dit, un A-*module* est un ensemble M muni d'une loi interne $(x, y) \in M \times M \mapsto x + y$ et d'une loi externe $(a, x) \in A \times M \mapsto a \cdot x \in M$ appelée parfois *multiplication par un scalaire*, satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. l'ensemble M, muni de la loi $+$, est un groupe abélien ;
2. pour tous $x, y \in M$, et tout $a \in A$, on a $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$;
3. pour tout $x \in M$, on a $1_A \cdot x = x$;
4. pour tout $x \in M$, et tous $a, b \in A$, on a $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;
5. pour tous $a, b \in A$, et tout $x \in M$, on a $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.

La théorie des modules sur un anneau a été développée par Emmy Noether, et a eu pour point de départ l'étude des représentations linéaires d'un groupe fini.

Afin d'expliquer le lien avec les modules, introduisons une notation : si G est un groupe fini, noté multiplicativement, et si k est un corps, on note $k[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles des éléments de G, c'est-à-dire

$$k[G] = \Big\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in k \Big\}$$

que l'on munit de l'addition et de l'unique loi produit distributive sur $k[G]$ qui étend la loi de groupe. On vérifie que $k[G]$ est un anneau, muni d'une structure de k-espace vectoriel pour laquelle la loi produit de l'anneau $k[G]$ est k-bilinéaire. C'est donc une k-algèbre associative unitaire. On montre alors que se donner une action k-linéaire de G sur V revient à se donner une structure de $k[G]$-module sur V qui étend la loi externe du k-espace vectoriel V.

On obtient ainsi un dictionnaire entre la théorie des $k[G]$-modules et la théorie des représentations. L'étude systématique des $k[G]$-modules simples est particulièrement importante, puisque ceux-ci correspondent aux représentations irréductibles.

La théorie des modules permit aussi à Joseph Wedderburn de démontrer que toute k-algèbre associative unitaire de dimension finie sur k, de centre k, et n'ayant pas d'idéaux bilatères non triviaux, est isomorphe à une algèbre de matrices sur un anneau à division (i.e. un corps gauche).

Enfin, la théorie des modules sur un anneau principal permet d'obtenir à peu de frais la structure des groupes abéliens de type fini, ainsi qu'une classification complète des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie en termes de certains polynômes se calculant de manière algorithmique. En guise d'applications de cette théorie, on peut également (entre autres) résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients entiers, démontrer des résultats sur le commutant et le bicommutant d'un endomorphisme, et aussi retrouver la décomposition de Jordan aisément avec en prime une méthode de calcul systématique.

Buts du TER

Dans un premier temps :

1) Comprendre les définitions de base (module libre, de torsion, applications linéaires...) et pointer les différences fondamentales avec les espaces vectoriels. En particulier, on étudiera de plus près l'existence de bases, et on étudiera aussi si deux bases ont même cardinal. (Spoiler : pas toujours !)

2) Démontrer le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal, et appliquer ce résultat aux groupes abéliens de type fini et au problème des similitudes d'endomorphismes. Éventuellement, appliquer aussi la théorie au calcul du commutant et du bicommutant d'un endomorphisme, et à la résolution de systèmes linéaires à coefficients entiers.

Dans un second temps :

3) Démontrer le théorème de Wedderburn sur la structure des k-algèbres de centre k, n'ayant pas d'idéaux bilatères non triviaux.

4) S'intéresser à la notion de module projectif, stablement libre, etc., et fournir des exemples et contre-exemples, ou d'autres applications.

Prérequis

Aucun.

14 Localisation effective de racines de polynômes

Pour un polynôme P donné, il s'agit de déterminer de manière effective des intervalles d'isolation des racines réelles de P (si P est à coefficients réels) ou des boules du plan complexe (pour la norme euclidienne ou pour la norme du maximum) contenant chacune une racine et une seule.

Plusieurs algorithmes pourront être étudiés : élimination des multiplicités (algorithme de Yun, PGCD modulaire) et racines rationnelles ou dans $\mathbb{Q}[i]$ si les coefficients sont exacts, suites de Sturm, algorithmes utilisant la règle des signes de Descartes dans le cas réel, méthodes itératives approchées (Newton, homotopie, valeurs propres de la matrice companion), autres.

Bibliographie

Bernard Parisse, Algorithmes de calcul. On pourra rechercher des mots clefs du sujet dans l'index de la page :
https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/giac/doc/fr/algo.html

Michael Eisermann (2012), The Fundamental Theorem of Algebra Made Effective : An Elementary-Algebraic Proof via Sturm Chains, *The American Mathematical Monthly* 119 (9), 715–52.
https://arxiv.org/abs/0808.0097

Fabrice Rouillier, Paul Zimmermann (2004), Efficient isolation of polynomial's real roots, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 162 (1), 33-50.
https://hal.inria.fr/inria-00072518

15 Opérateurs compacts et applications

Pour une fonction $f \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ donnée et en notant $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on sait peut-être déjà démontrer que l'opérateur $T : E \to E$, $u \mapsto Tu$, défini par

$$\forall x \in [0,1], \quad (Tu)(x) = \int_0^1 f(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

est compact sur l'espace E muni de la norme uniforme, c'est-à-dire que l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compacte dans E.

On étudiera quelques exemples naturels d'opérateurs compacts, ainsi qu'un théorème de « décomposition spectrale » (c'est-à-dire de diagonalisation en base orthonormée) des opérateurs compacts auto-adjoints sur un espace de Hilbert. De plus, on verra que ce théorème spectral peut servir à résoudre des équations aux dérivées partielles telles que l'équation de la chaleur.

Prérequis

Topologie de L3.

Bibliographie

Haïm Brézis (1983), *Analyse fonctionnelle (théorie et applications)*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson.

Lawrence C. Evans (1997), *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society.

16 Polynômes et fractions rationnelles invariants sous l'action d'un groupe fini

Le point de départ est le théorème de structure des polynômes symétriques, dont on rappelle l'énoncé maintenant. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $k[X_1, \ldots, X_n]$ par permutation des variables. Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \ldots, X_n$, tout polynôme symétrique (i.e., fixe sous l'action de $\mathfrak{S}_n$) s'écrit de manière **unique** comme un polynôme en $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

En particulier, on a donc $k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[\sigma_1, \ldots \sigma_n]$.

Mieux : la partie unicité du théorème montre que l'on a un isomorphisme de k-algèbres

$$k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \simeq k[T_1, \ldots, T_n].$$

On obtient le même genre de résultats avec les fractions rationnelles. En faisant agir le groupe symétrique sur $k(X_1, \ldots, X_n)$ par permutation des variables, on obtient l' égalité $k(X_1, \ldots, X_n)^{\mathfrak{S}_n} = k(\sigma_1, \ldots \sigma_n)$, et un isomorphisme de k-algèbres

$$k(X_1, \ldots, X_n)^{\mathfrak{S}_n} \simeq k(T_1, \ldots, T_n).$$

L'action du groupe symétrique sur les polynômes et les fractions rationnelles peut être placée dans un contexte plus général, que nous décrivons maintenant.

Soit G un groupe fini, et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ un morphisme de groupes. Si f est un polynôme ou une fraction rationnelle, on note $g \cdot f$ le polynôme ou la fraction rationnelle obtenue en remplaçant $X_1, \ldots, X_n$ par les coordonnées du vecteur

$$\rho(g)^{-t} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

On montre alors que l'on obtient des actions de G sur $k[X_1, \ldots, X_n]$ et sur $k(X_1, \ldots, X_n)$.

Lorsque $G = \mathfrak{S}_n$ et $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(k)$ est le morphisme obtenu via les matrices de permutation, on montre que l'on retrouve l'action naturelle par permutation des variables. On peut alors se demander si les k-algèbres $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ et $k(X_1, \ldots, X_n)^G$ sont respectivement isomorphes à une algèbre de polynômes et à une algèbre de fractions rationnelles.

Buts du TER

On supposera que k est un corps de caractéristique 0. Dans un premier temps :

1) Calculer $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ dans quelques cas simples, et montrer que $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ n'est pas nécessairement isomorphe à une algèbre de polynômes.

2) Montrer que $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est engendrée comme k-algèbre par un nombre fini de polynômes.

3) Démontrer le théorème de Fischer : soit G un groupe abélien fini d'exposant e, et soit F un corps tel que $\mathrm{car}(F)$ ne divise pas e et $\mu_e(\overline{F}) \subset F$. Alors, pour tout morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$, on a un isomorphisme d'algèbres

$$F(X_1, \ldots, X_n)^G \simeq F(T_1, \ldots, T_n).$$

Autrement dit, il existe des fractions rationnelles $f_1, \ldots, f_n \in F(X_1, \ldots, X_n)^G$ algébriquement indépendantes sur F telles que $F(X_1, \ldots, X_n)^G = F(f_1, \ldots, f_n)$.

Dans un second temps, l'étudiant(e) pourra approfondir au choix certains aspects de la théorie des polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini : calcul des générateurs de $k[X_1, \ldots, X_n]^G$, série de Hilbert, formule de Molien, ou démontrer le théorème de Chevalley-Sheppard-Todd (qui dit en substance que $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est isomorphe à une algèbre de polynômes si et seulement si G est engendré par des pseudo-réflexions), etc.

Prérequis

Quelques notions de base en théorie des représentations seront toujours utiles.

17 Prégroupes

Il s'agit d'étudier la structure de prégroupe, introduite par Stallings dans les années 1970. Un prégroupe est un ensemble muni d'une opération définie partiellement (c'est à dire que $x \times y$ n'est pas forcément défini pour tout couple (x, y)) et vérifiant des axiomes dont l'existence d'un élément neutre et l'existence d'un inverse.

Nous verrons par exemple que pour un prégroupe P donné, il existe un groupe $U(P)$ dans lequel P s'injecte et qui est « universel », dans un sens précis. En fonction du temps et de l'avancée du travail, nous étudierons plus en détail le lien entre P et $U(P)$.

Bibliographie

John R. Stallings (1971), *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Monographs.

18 Le problème du coloriage des routes

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini orienté : V est un ensemble fini, dont les éléments sont les sommets du graphe (en anglais *vertices*), et E une partie de V^2 dont les éléments sont les arêtes du graphe (en anglais *edges*).

On suppose le graphe irréductible : de tout sommet on peut atteindre n'importe quel sommet en suivant les arêtes.

On suppose le graphe apériodique : pour chaque sommet, le PGCD des longueurs des circuits allant de ce sommet à lui-même vaut 1.

On suppose qu'en chaque sommet le degré sortant (nombre d'arrêtes issues du sommet) est constant égal à $r \geqslant 2$.

On colorie les arêtes avec r couleurs, en attribuant des couleurs différentes aux r arêtes issues d'un même sommet. Si en partant d'un sommet et en suivant dans l'ordre les arêtes de couleurs $i_1, \ldots, i_\ell$, on arrive à un sommet indépendant du point de départ, on dit que le mot $(i_1, \ldots, i_\ell)$ est synchronisant.

Est-il possible de trouver un coloriage synchronisant, c'est-à-dire possédant un mot synchronisant ? Comment trouve-t-on de tels mots ? Que peut-on dire de la longueur minimale d'un tel mot ? Ces problèmes formulés en termes de graphes peuvent l'être en termes d'automates finis ou de chaînes de Markov.

Avraham Trahtman a démontré en 2009 qu'un graphe orienté fini, irréductible, apériodique, de degré sortant constant au moins égal à 2, possède toujours un coloriage synchronisant, répondant ainsi à une conjecture formulée en 1977 par Roy Adler, Wayne Goodwyn et Benjamin Weiss.

On étudiera la preuve de Trahtman et un certain nombre de questions qui s'y rattachent.

Prérequis

Peu de préréquis, sauf les chaînes de Markov si l'on choisit de jeter un coup d'oeil dans cette direction. Les concepts utilisés sont simples, même si les résultats sont non-triviaux. Il faut en revanche s'adapter à un langage peut-être inhabituel, variant suivant les références consultées, dont certaines sont des articles de recherche en anglais.

Bibliographie

Roy L. Adler, L. Wayne Goodwyn, Benjamin Weiss (1977), Equivalence of topological Markov shifts, *Israel Journal of Mathematics* 27 (1), 49–63.

Joel Friedman (1990), On the road coloring problem, *Proceedings of the American Mathematical Society* 110 (4), 1133–1135.
https://www.ams.org/journals/proc/1990-110-04/

Jarkko Kari (2003), Synchronizing automata on Eulerian digraphs, *Theoretical Computer Science* 295, 223–232.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439750200405X

Avraham N. Trahtman (2009), The road coloring problem, *Israel Journal of Mathematics* 172 (1), 51–60.
https://arxiv.org/abs/0709.0099

Coloriage des routes, page Wikipedia.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Coloriage~des~routes

19 Quelques propriétés de l'opérateur divergence

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable, la divergence de u est définie par

$$\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x_i}.$$

Ce TER est consacré à l'étude des équations $\operatorname{div} u = f$ et $\operatorname{div} u = \mu$, où $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est une fonction et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, on montrera que, si $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 avec $1 \leqslant p \leqslant \frac{n}{n-1}$ et si $\operatorname{div} u = \mu$, alors $\mu = 0$. Plus généralement, on examinera les liens entre les propriétés de f ou de μ, et les propriétés de la solution u.

Prérequis

Le contenu de cours de L3 en théorie de la mesure et en calcul différentiel.

Bibliographie

Eduard Curcà (2020), On the existence of vector fields with nonnegative divergence in rearrangement invariant spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 69 (1), 119-136.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01664360v2

Nguyen Cong Phuc, Monica Torres (2008), Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields, *Indiana Univ. Math. J.* 57 (4), 1573-1597.
https://www.math.purdue.edu/~torresm/pubs/Divergence-measure-fields.pdf

20 Représentation (info)graphique d'inéquations en deux variables

On s'intéresse à la représentation sur une matrice de pixels carrés, par exemple un écran de calculatrice de résolution 320×222, de la solution d'une inéquation ou d'un système d'inéquations en deux variables. Plusieurs types d'inéquations pourront être étudiés : cas linéaire, cas du disque, se ramenant au second degré en une variable (en particulier les coniques), équations polynomiales, cas général.

Algorithmes/Références

Algorithme de Bresenham.
http://raphaello.univ-fcomte.fr/Ig/Algorithme

Parcours de Graham : calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'intersection (pour les systèmes linéaires).
https://fr.wikipedia.org/wiki/Parcours_de_Graham

Utilisation du résultant pour trouver les points d'intersection dans le cas de systèmes d'inéquations polynomiales : voir le mémoire de TER intitulé *Résultant de deux polynômes et applications*, par Naïs Lévêque (2021), disponible sur la page d'archives du M1 Mathématiques générales.
https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~m1maths/archive.html

21 Retenues, jeux de cartes et processus déterminantaux

Pour additionner des nombres écrits en base 10, on les écrit en colonne, la colonne de droite étant celle des unités, la suivante celle des dizaines, etc., puis on ajoute les chiffres colonne par colonne : en commençant par les unités, les dizaines suivent, puis les centaines, et ainsi de suite. Quand le total des chiffres d'une colonne dépasse 9, une retenue se forme, qu'il faut reporter sur la colonne suivante. La même méthode s'applique pour additionner des nombres écrits en base b, pour n'importe quel entier $b \geqslant 2$.

On va s'interroger sur le nombre moyen de reports de retenues nécessaires, et sur la valeur moyenne de ces retenues. Il se trouve que ces questions soulèvent des problèmes mathématiques non triviaux, dont la résolution fait intervenir des outils probabilistes, combinatoires et analytiques.

On sera amené à parler d'un battage de cartes particulier (le battage mitraillette) et de processus ponctuels déterminantaux.

Prérequis

Le cours de Probabilités du premier semestre.

Bibliographie

Alexei Borodin, Persi Diaconis, Jason Fulman (2010), On adding a list of numbers (and other one-dependent determinantal processes), *Bulletin of the American Mathematical Society* 47 (4), 639-670.
https://arxiv.org/abs/0904.3740

Persi Diaconis, Jason Fulman (2009), Carries, shuffling, and an amazing matrix, *The American Mathematical Monthly* 116 (9), 788-803.
https://arxiv.org/abs/0806.3583

John M. Holte (1997), Carries, combinatorics, and an amazing matrix, *The American Mathematical Monthly* 104 (2), 138-149.
http://homepages.gac.edu/~holte/publications.html

22 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et groupes fuchsiens

Pour étudier un groupe G, on peut commencer par le faire agir sur un espace adéquat ! L'espace que nous considèrerons ici sera le plan hyperbolique, également appelé demi-plan de Poincaré. Une première partie du travail consistera à étudier sa géométrie, sa métrique ainsi que ses géodésiques. Ceci permettra dans un second temps de décrire et de comprendre l'action de $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur le plan hyperbolique par transformations homographiques.

On appliquera cette devise (faire agir un groupe sur un espace) à d'autres sous-groupes classiques, comme les groupes de congruences, ou encore des sous-groupes non arithmétiques de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ comme les groupes de Hecke, afin d'en exhiber des propriétés non-triviales. Enfin, si le temps le permet, on se penchera sur le cas de la dimension supérieure avec $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pour $n \geqslant 3$.

Prérequis

Algèbre et topologie de L3.

Bibliographie

Svetlana Katok (1992), *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago University Press.

23 Suite de Prouhet-Thue-Morse

Il existe de nombreuses définitions de la suite de Prouhet-Thue-Morse. Une façon de la construire est de poser $t_0 = 1$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(t_{2^k}, \ldots, t_{2^{k+1}-1}) := (1 - t_0, \ldots, 1 - t_{2^k-1}).$$

Les premiers termes (de t_0 à t_{15}) de la suite à valeurs dans $\{0, 1\}$ obtenue sont donc

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1.$$

Cette suite apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques, comme le montre l'article de synthèse d'Allouche et Shallit (1999) en référence.

On cherchera à comprendre un certain nombre de propriétés de la suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$, et notamment le produit infini surprenant

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{2t_k - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

accompagné de la propriété (théorème 3.1 de l'article d'Allouche et Cohen) selon laquelle, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} = 1 \quad &\text{si} \quad \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{2t_k - 1} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t_{n+1} = 0 \quad &\text{si} \quad \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{2t_k - 1} < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Suivant les affinités, il sera possible de pousser l'étude dans des directions variées, par exemple en s'appuyant sur le livre très riche d'Allouche et Shallit (2003).

Prérequis

Une certaine aisance dans les manipulations de séries. Le reste repose sur des notions assez élémentaires : mots sur un alphabet fini, morphismes sur les mots, automates finis.

Bibliographie

Jean-Paul Allouche, Henri Cohen (1985), Dirichlet series and curious infinite products, *Bulletin of London Mathematical Society* 17, 239–266.

Jean-Paul Allouche, Jeffrey O. Shallit (1999), The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence, in *Sequences and their applications : Proceedings of SETA '98*, 1–16.
https://cs.uwaterloo.ca/~shallit/Papers/ubiq15.pdf

Jean-Paul Allouche, Jeffrey O. Shallit (2003), *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press.

24 Systèmes différentiels à coefficients périodiques

I. Équation de Hill : il s'agit de l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$, où la fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et T-périodique. On étudiera cette équation et on donnera une condition suffisante pour qu'elle admette une solution périodique.

II. Théorème de Floquet : il s'agit de donner la forme des solutions du système différentiel $X' = A(t)X$, où la fonction $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est T-périodique, et de préciser une condition suffisante pour qu'il admette des solutions périodiques. On pourra aussi étudier la stabilité des solutions.

III. On pourra aussi étudier le théorème de Massera linéaire (et non linéaire) sur les solutions périodiques, ainsi que le théorème de Reissig.

IV. On pourra (éventuellement) donner une condition suffisante pour qu'une équation de Riccati admette une solution périodique.

Bibliographie

Pour I et II : Florent Berthelin (2017), *Équations différentielles*, Cassini.

Pour III : Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel (1998), *Calcul différentiel*, Ellipses.

Pour IV : Walid Oukil (2019), *Équation différentielle de Riccati à coefficients non constants*, Publication indépendante.

25 Tas de sable aléatoires

Un *tas de sable* sur une grille carrée Λ de taille $n \times n$ est modélisé par une application $h : \Lambda \to \mathbb{N}$ qui décrit combien de grains de sable chaque case contient. Les piles trop hautes sont instables : s'il existe une case i avec $h(i) \geqslant 4$, la pile correspondante s'écroule et donne un grain à chacune des cases voisines (et les grains qui tombent en dehors de la grille disparaissent) ; si on fait écrouler toutes les piles instables au fur et à mesure, on arrive finalement à une configuration stable $S(h)$.

À partir de ces règles très simples, on arrive vite à des développements mathématiques récents et à des questions qui restent ouvertes. Un premier résultat remarquable est que la configuration finale $S(h)$ est bien définie (au sens où elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait écrouler les piles) : le modèle est dit *abélien*. Cela permet de définir une addition sur les configurations stables, en posant $h_1 \oplus h_2 = S(h_1 + h_2)$, qui de façon tout aussi remarquable munit les configurations *récurrentes* (celles qu'on peut obtenir en ajoutant un nombre arbitrairement grand de grains à partir de la configuration vide) d'une structure de groupe abélien, dont l'identité est une configuration (récurrente, donc non vide !) qui fait apparaître des motifs fractals mal compris.

La version aléatoire du modèle consiste à ajouter des grains un par un sur des cases tirées au hasard sur la grille, en stabilisant la configuration entre deux ajouts : on construit ainsi une chaîne de Markov, dont la compréhension fait intervenir de manière surprenante des marches aléatoires, des processus de croissance, et des équations au dérivées partielles.

Il s'agira de comprendre le modèle et certains des résultats récents le concernant.

Prérequis

Le cours de probabilités du premier semestre.

Bibliographie

Moritz Lang, Mikhail Shkolnikov (2019), Harmonic dynamics of the abelian sandpile, *PNAS* 116 (8), 2821-2830.
https://doi.org/10.1073/pnas.1812015116

Jordan Ellenberg (2021), The Math of the Amazing Sandpile, *Nautilus*.
https://nautil.us/the-math-of-the-amazing-sandpile-238320

26 Théorème des syzygies de Hilbert

Soit I un idéal de l'anneau des polynômes $K[X_1, \ldots, X_n]$. La taille de I, ou plutôt sa croissance, peut être décrite en considérant, pour tout entier d, la dimension $H(d)$ du sous-espace vectoriel des éléments de I de degré inférieur à d. Le théorème des syzygies de Hilbert affirme que, pour tout d assez grand, $H(d)$ est un polynôme en d.

On se propose de démontrer ce théorème en passant par la construction d'une résolution libre finie de l'idéal I.

Prérequis

Cours d'algèbre du premier semestre.

Bibliographie

David A. Cox, John Little, Donal O'Shea (2005), *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

David A. Cox, John Little, Donal O'Shea (2015), *Ideals, Variety and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

27 Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et applications

Le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin affirme que, si une application linéaire T est continue de $L^{p_0}(\mu)$ dans $L^{q_0}(\nu)$ avec norme M_0 et continue de $L^{p_1}(\mu)$ dans $L^{q_1}(\nu)$ avec norme M_1, alors, pour tout p entre p_0 et p_1, T est continue de $L^p(\mu)$ dans un certain $L^q(\nu)$ avec une norme contrôlée en termes de p, p_0, p_1, M_0 et M_1.

On démontrera ce résultat par une méthode d'analyse complexe. On pourra l'appliquer à la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^d$. On pourra aussi, entre autres, obtenir des renseignements sur le comportement au cours du temps des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Prérequis

Espaces L^p sur un ouvert, inégalité de Hölder. Notions sur les fonctions holomorphes.

Bibliographie

Joran Bergh, Jorgen Löfström (1976), *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.

28 Type topologique des surfaces définies par des polynômes dans $\mathbb{C}^2$

Soit $P(z_1, z_2)$ un polynôme de degré d en deux variables complexes. Le lieu où $P(z_1, z_2) = 0$ est un sous ensemble de $\mathbb{C}^2$ qui, sous des hypothèses pas trop contraignantes sur P, est une surface dans $\mathbb{C}^2$ au sens du calcul différentiel : on la notera S_P. Il existe une procédure algébrique standard, appelée *projectivisation*, qui permet d'ajouter des points à l'infini de S_P, correspondant à ses branches asymptotiques, pour en faire une surface compacte, qu'on notera $\overline{S}_P$. Le type topologique de la surfaces $\overline{S}_P$ dépend alors uniquement du degré d du polynôme P : c'est un multi-tore avec $g(d)$ trous, où $g(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Le but principal du TER sera de comprendre le processus de projectivisation et de démontrer le théorème sur le type topologique. (Il sera probablement nécessaire d'admettre certains énoncés sur la topologie des surfaces compactes.) Ensuite, on pourra éventuellement regarder les cas où le lieu S_P possède des points de singularité, ou les ruptures de topologie qui se produisent lorsque le polynôme de définition est réel plutôt que complexe.

Prérequis

Algèbre des anneaux de polynômes, fonctions holomorphes.

Bibliographie

Alan F. Beardon (1984), *A primer on Riemann surfaces*, Cambridge.

Frances Kirwan (1992), *Complex Algebraic Curves*, Cambridge.

Miles Reid (1988), *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge.

29 L'équation de Schrödinger et l'atome d'hydrogène

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles. C'est l'équation fondamentale de la mécanique quantique. Elle s'écrit

$$i\partial_t\psi = H\psi, \quad H = -\Delta + V,$$

où V est une fonction à valeurs réelles (le potentiel). L'opérateur H est en général autoadjoint (c'est un peu plus que symétrique).

Il s'agira, à travers cet exemple, de découvrir l'analyse spectrale, domaine dans lequel on étudie en particulier les opérateurs autoadjoints. On portera une attention particulière au cas $V(x) = -\frac{1}{|x|}$, qui décrit l'atome hydrogène.

Prérequis

Le cours d'analyse du premier semestre.

Bibliographie

Michael Reed, Barry Simon (1983), *Methods of modern mathematical Physics 1*, Academic Press.

Edward B. Davies (1995), *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press.

Michael E. Taylor (1996), *Partial Differential Equations 1 : Basic Theory*, Applied Mathematical Sciences 115, Springer.

30 L'espace-temps anti de Sitter

L'espace-temps anti de Sitter est une variété lorentzienne de courbure scalaire constante négative, solution des équations d'Einstein dans le vide avec une constante cosmologique négative. Son importance en physique vient surtout de la correspondance AdS/CFT.

Il s'agira d'étudier la géométrie de cet espace-temps en détail et d'essayer de comprendre l'influence de cette géométrie sur le comportement des solutions de l'équation de Klein-Gordon dans cet espace-temps.

Prérequis

Le cours d'analyse du premier semestre et le cours de calcul différentiel et équations différentielles de L3.

Pour choisir ce sujet, on recommande fortement de choisir également l'UE Géométrie différentielle au deuxième semestre.

Bibliographie

Jerry B. Griffiths, Jiří Podolský (2010), *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge University Press.

Barrett O'Neill (1983), *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press.

31 Analyse sur les fractales

On souhaite construire un « Laplacien » sur certaines fractales auto-similaires dans le plan (par exemple sur le triangle de Sierpinski, voir image en référence). On commencera par construire mathématiquement les fractales en question, et à s'intéresser à certaines de leurs propriétés élémentaires, comme leur dimension de Hausdorff. Puis on discutera la notion de Laplacien discret sur un graphe. Enfin, on cherchera à construire un Laplacien sur une telle fractale, en approchant cette fractale en un certain sens par une suite de graphes finis emboîtés.

Prérequis

Une bonne maîtrise du contenu du cours de théorie de la mesure et intégration de L3 est nécessaire.

Bibliographie

Image du triangle de Sierpinski.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Sierpinski

Jun Kigami (2001), *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics 143.

32 Autour de la théorie des ondelettes

La théorie des ondelettes a été utilisée dans des problèmes d'ingénierie dès les années 1970. Elle a par la suite été développée de façon rigoureuse par les mathématiciens, et a donné lieu plus tard à des applications spectaculaires comme l'algorithme de compression JPEG. La décomposition d'une fonction réelle (non périodique) en ondelettes constitue une sorte de généralisation de la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.

Dans un premier temps, on tentera de comprendre la construction mathématique d'une base d'ondelettes. Dans un deuxième temps et en fonction de l'avancée du travail, on pourra s'intéresser à une application théorique, comme la caractérisation d'un espace de fonctions (l'espace de Hardy H^1) en termes d'ondelettes, et éventuellement à une application pratique, comme comprendre le fonctionnement de certains algorithmes de compression.

Prérequis

Une bonne compréhension de l'analyse de Fourier vue dans les cours de L3 et de M1.

Bibliographie

Yves Meyer (1992), *Wavelets and operators, vol. 1*, Cambridge University Press.

Stéphane Mallat (2009), *A wavelet tour of signal processing*, Third edition, Academic Press.