

## Sujets de TER

### Mode d'emploi

On postera au plus tard **vendredi 3 décembre 23h59** sur le serveur **Discord** de la filière Mathématiques, dans le salon privé de l'utilisateur **Didier Piau**, un message indiquant les numéros des quatre sujets sur lesquels on souhaite travailler, écrits dans l'ordre décroissant de préférence (ou bien une absence de préférence).

Recopier les titres des sujets ou ajouter des formules de politesse est inutile. Dans l'immense majorité des cas, le message contiendra donc exclusivement quatre numéros de sujets.

L'exception est le cas où une poursuite d'études autre qu'en M2 Agrégation est envisagée, par exemple en M2 Cybersecurity ou en M2 ORCO, et où on souhaite travailler sur un sujet en lien avec cette poursuite d'études ; alors, le mentionner dans le message.

### Titres des sujets

- 1 Action dans la table des caractères
- 2 Analyse spectrale et équation de Schrödinger
- 3 Assistants de preuves et formalisation
- 4 Blocage des rayons lumineux
- 5 Circuit quantique à deux qubits
- 6 Classification des surfaces
- 7 Dérivabilité de fonctions définies par des séries lacunaires
- 8 Effets de seuil
- 9 Équations d'évolution unitaires en régime adiabatique
- 10 Existence de géodésiques fermées sur les surfaces
- 11 Fonctions harmoniques et marches aléatoires sur les graphes infinis

- 12 Groupes simples d'ordre 168
- 13 Homéomorphismes du cercle préservant l'orientation
- 14 Interpolation de Riesz-Thorin et applications
- 15 Localisation effective de racines de polynômes
- 16 Marches aléatoires dans le quart de plan
- 17 Nombres de Hurwitz
- 18 Opérateurs d'intégrales singulières
- 19 Paradoxe de Banach-Tarski
- 20 Primitives de la fonction gaussienne et fonctions usuelles
- 21 Processus de Galton Watson
- 22 Quelques propriétés de l'opérateur divergence
- 23 Représentation (info)graphique d'inéquations en deux variables
- 24 Réseaux euclidiens et applications arithmétiques
- 25 Sous-groupes finis du groupe linéaire
- 26 Réalisabilité de groupes (ex-sujet mystère n° 1)
- 27 Jeu de policiers-voleur (ex-sujet mystère n° 2)
- 28 Introduction à l'informatique quantique (ex-sujet mystère n° 3)
- 29 Résolution algébrique de systèmes polynomiaux multivariés (ex-sujet mystère n° 4)
- 30 Théorème des nombres premiers
- 31 Vagues de spins et théorème de Mermin-Wagner

## 1 Action dans la table des caractères

Le caractère d'une représentation complexe  $(V, \rho)$  d'un groupe fini  $G$  est l'application  $g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . On a montré au premier semestre que la table des caractères de  $G$ , tableau carré qui donne par ligne les valeurs des différents caractères des représentations irréductibles, condense les informations sur les représentations de  $G$ .

On étudiera des propriétés de cette table relatives aux *valeurs* des caractères irréductibles.

Ces valeurs sont des sommes de racines  $|G|$ -ièmes de l'unité. Si  $\mathbb{Q}_{|G|}$  désigne le corps engendré par ces racines de l'unité, on fera intervenir l'action du groupe de Galois de  $\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q}$  sur les lignes et sur les colonnes de la table. On verra par exemple pourquoi la table du groupe symétrique  $S_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , et pourquoi tout groupe d'ordre pair admet un caractère réel non trivial. On expliquera la présence et l'emplacement de nombreux zéros dans la table quand  $G$  n'est pas abélien, et on étudiera des relations entre l'ordre des éléments de  $G$  et le corps engendré par leur colonne ou des lignes de la table. On s'intéressera à quelques exemples, dont le cas du groupe alterné  $G = A_5$ .

### Prérequis

Cours d'Algèbre de L3 et M1. Théorie de Galois conseillée.

### Bibliographie

G. Navarro, *Character Theory and the McKay Conjecture*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2018 : chapitre 2 (partiellement), chapitres 3 et 4.

## 2 Analyse spectrale et équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles. C'est l'équation fondamentale de la mécanique quantique. Elle s'écrit

$$i\partial_t\psi = H\psi, \quad H = -\Delta + V,$$

où  $V$  est une fonction à valeurs réelles (le potentiel). L'opérateur  $H$  est en général autoadjoint (c'est un peu plus que symétrique). A travers cet exemple nous allons découvrir l'analyse spectrale, domaine dans lequel on étudie en particulier les opérateurs autoadjoints. Un théorème fondamental de l'analyse spectrale, le théorème spectral, dit que tout opérateur autoadjoint peut être représenté comme opérateur de multiplication sur un certain espace  $L^2$ .

### Prérequis

Le cours d'Analyse du premier semestre.

## Bibliographie

Michael Reed, Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics 1*, Academic Press, 1983.

Edward B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press 1995.

Michael E. Taylor, *Partial Differential Equations 1 : Basic Theory*, Applied Mathematical Sciences 115, Springer 1996.

## 3 Assistants de preuves et formalisation

Un assistant de preuve est un programme informatique capable, étant donnés un ensemble d'axiomes, un théorème et une preuve mathématique formalisés dans un langage spécifique, de valider cette preuve (et donc aussi le fait que le théorème est une conséquence de ces axiomes). Le développement de tels outils est très actif depuis une vingtaine d'années, et on les a par exemple utilisés pour vérifier la preuve du théorème des quatre couleurs.

Le logiciel qui a été utilisé pour cela (appelé Coq) n'est pas d'un abord très facile, surtout pour les mathématicien·ne·s, mais plus récemment un nouvel assistant appelé LEAN (ou plutôt  $L\exists\forall N$ ) a changé la donne en présentant une interface beaucoup plus facilement utilisable.

Le but du TER est de découvrir cet assistant de preuve et de l'utiliser de manière non triviale, par exemple en formalisant l'énoncé et si possible la preuve de l'un des résultats mathématiques vus au premier semestre de cette année, ou l'année dernière. C'est une activité à la fois extrêmement théorique, puisqu'il faut comprendre les objets mathématiques concernés dans les moindres détails (on ne peut tricher nulle part), et presque ludique : l'interface est interactive et se présente comme un puzzle à résoudre.

Une autre direction possible est l'étude du fondement théorique de ces assistants, ce qui passe par la logique mathématique et en particulier par l'isomorphisme de Curry–Howard (qui relie preuves mathématiques et programmes informatiques) et la théorie des types (alternative à la théorie des ensembles pour formaliser les mathématiques).

### Prérequis

Vraiment aucun prérequis mathématique pour le début puisqu'on part de zéro, par contre il faut être un peu à l'aise avec l'outil informatique ; ensuite, cela dépendra du théorème qui sera formalisé.

## Bibliographie

Sur la formalisation du théorème des quatre couleurs : Gonthier, Georges, *Formal proof, the four-color theorem*, Notices de l'AMS 55 (2008), no. 11, 1382–1393. <https://www.>

[ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf](https://ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf)

Site web de LEAN : <https://leanprover.github.io/>

En guise d'exemple, la preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers en vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=b59fpAJ8Mfs>

Introduction interactive à LEAN : découvrir les axiomes de Peano et prouver les résultats usuels sur les nombres entiers. [https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural\\_number\\_game/](https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/)

## 4 Blocage des rayons lumineux

Les professeurs Smith et Jones ne peuvent se supporter, malheureusement ils vont se trouver ensemble pour une réunion dans une pièce rectangulaire dont les murs sont des miroirs. Smith demande à ses étudiants de se placer de telle façon qu'il ne voie pas Jones. Où doivent se placer les étudiants de Smith ?

Ce problème, que l'on trouve dans les livres d'Olympiades mathématiques de la ville de Saint-Pétersbourg (à l'époque, Léninegrad) des années 1960, en apparence simple, a donné naissance à une théorie riche mélangeant de nombreux outils mathématiques.

Le but du travail proposé est de comprendre le lien entre billards et surfaces, et de démontrer quelques résultats d'illumination par des méthodes élémentaires. Selon le temps, cela sera aussi l'occasion de parler de théorie ergodique pour les trajectoires de billards.

### Bibliographie

Sergei Tabachnikov, Geometry and billiards, Amer. Math. Soc., 2005. <http://www.personal.psu.edu/sot2/books/billiardsgeometry.pdf>

Thierry Monteil, A counter-example to the theorem of Hiemer and Snurnikov, Journal of Statistical Physics 114, 1619–1623 (2004). <https://arxiv.org/abs/math/0408431>

## 5 Circuit quantique à deux qubits

Tout ordinateur est constitué de briques élémentaires, ayant un certain nombre d'entrées et de sorties et connectées les unes aux autres pour former cette magnifique machine. Il en va de même pour un ordinateur quantique, à ceci près que la quantité de ces briques élémentaires donne le vertige : quelle puissance de calcul !

Mathématiquement, une brique à  $N$  entrées et  $N$  sorties est un élément du groupe spécial unitaire  $SU(N)$ . Un ensemble de briques élémentaires est un ensemble de générateurs pour ce groupe. Se pose alors la question de savoir représenter de façon minimale tout élément de  $SU(N)$  en fonction de ces générateurs, construisant ainsi un « circuit imprimé quantique » (la réalisation de ce circuit imprimé ne sera pas l'objet du stage !)

Dans le cadre de ce TER, on se propose d'étudier les cas  $N = 1$  et  $N = 2$ , ce qui est plus compliqué qu'il n'y paraît.

En premier lieu, posons-nous la question de la répartition des valeurs propres d'un triplet  $(U_1, U_2, U_3) \in \text{SU}(N)^3$  lorsque  $U_1 U_2 = U_3$  et apprécions déjà la difficulté de cette question.

L'objectif final pourra être de montrer que presque tout programme à deux qubits peut être réalisé à l'aide de trois briques élémentaires et qu'on peut même se restreindre à deux briques élémentaires si l'on accepte l'idée de se tromper.

### **Prérequis et notions développées**

Algèbre linéaire, groupe de Lie, géométrie énumérative. De la motivation et de la curiosité. Pas nécessairement de connaissances en physique quantique.

### **Bibliographie**

Eric C. Peterson, Gavin E. Crooks, Robert S. Smith, Fixed-Depth Two-Qubit Circuits and the Monodromy Polytope, *Quantum* 4, 247 (2020). <https://quantum-journal.org/papers/q-2020-03-26-247/>

## **6 Classification des surfaces**

La première preuve rigoureuse du théorème de classification des surfaces fut donnée par Dehn et Heegaard en 1907, sous l'hypothèse de l'existence d'une triangulation (c'est-à-dire en supposant que la surface puisse être découpée en un nombre fini de triangles dont les intersections se font selon les arêtes et les sommets). La preuve fut définitivement complète en 1925 lorsque Radó démontra l'existence de telles triangulations pour les surfaces.

Ce théorème est assez surprenant puisque son énoncé est relativement simple alors que sa démonstration est longue et qu'elle nécessite divers outils mathématiques. Le but du travail proposé est de présenter le théorème de classification pour les surfaces compactes sans bord, et d'en donner une démonstration (sous l'hypothèse de l'existence de triangulation).

### **Prérequis**

Algèbre et topologie de L3.

### **Bibliographie**

André Gramain, *Topologie des surfaces*, PUF (1971).

Site web Analysis Situs. <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>

Massey W.S., Algebraic Topology, An Introduction, Graduate Texts in Mathematics, vol 56, Springer, 1967.

## 7 Dérivabilité de fonctions définies par des séries lacunaires

En 1872, Weierstrass, cherchant à construire une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable en aucun point, considère les fonctions

$$W(t) := \sum_{n \geq 1} a^n \cos(b^n t)$$

avec  $a$  et  $b$  réels. Il établit que, si  $0 < a < 1$ ,  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$  et  $b > 1$  est un entier impair, alors  $W$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ . En 1916, Hardy obtient la même conclusion sous la seule hypothèse que  $0 < a < 1$ ,  $ab \geq 1$  et  $b > 1$ ,  $b$  n'étant plus supposé entier.

Un autre exemple, qui présente des similarités, avait été proposé par Riemann aux alentours de 1861. Il s'agit de la fonction

$$R(t) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sin(\pi n^2 t),$$

qui est clairement continue sur  $\mathbb{R}$ . Riemann, puis Weierstrass, ont tenté sans succès de montrer que  $R$  n'est dérivable en aucun point. S'il est vrai que  $R$  n'est dérivable en aucun nombre irrationnel, Gerver a établi en 1970 que  $R$  est pourtant bien dérivable en certains points, qui sont exactement les nombres rationnels de la forme  $\frac{2p+1}{2q+1}$  avec  $p$  et  $q$  entiers.

Ce TER est consacré à la preuve de ces différents résultats de (non-)dérivabilité. Les preuves utilisent des résultats sur les séries de Fourier, et certaines fonctions particulières appelées ondelettes.

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure.

### Bibliographie

Matthias Holschneider, Philippe Tchamitchian, Pointwise analysis of Riemann's "non-differentiable" function, *Invent. Math.* **105**, 157-175, 1991.

Yitzhak Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004.

Yves Meyer, L'analyse par ondelettes d'un objet multifractal : la fonction  $\sum_1^\infty \frac{\sin(n^2 t)}{n^2}$  de Riemann, Publications mathématiques et informatique de Rennes n° 1, 1-19 (1992). <https://eudml.org/doc/274442>

## 8 Effets de seuil

Soit  $n \geq 1$  un (grand) entier. Pour tout  $p \in [0, 1]$ , on note  $\mathbb{P}_p$  la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables de Bernoulli de paramètre  $p$  indépendantes. Ainsi,  $\mathbb{P}_p$  est une loi sur  $\{0, 1\}^n$ . Soit maintenant  $A$  un sous-ensemble croissant de  $\{0, 1\}^n$ . Croissant signifie ici que si  $x, y \in \{0, 1\}^n$  sont tels que  $x \in A$  et  $y_i \geq x_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $y \in A$ . Par exemple,

$$\{x \in \{0, 1\}^n : \text{il y a plus de 1 que de 0 dans } x\}$$

est croissant. Le but de ce TER est d'étudier la question suivante :

Sous quelles conditions  $A$  satisfait-il un effet de seuil ?

On dit que  $A$  satisfait un effet de seuil si, quand on fait évoluer  $p$  de 0 à 1,  $\mathbb{P}_p[A]$  (qui est continue en  $p$ ) est proche de 0 pendant un temps puis passe très soudainement à proche de 1, état auquel elle reste jusqu'à  $p = 1$ . Ainsi, si  $A$  satisfait un effet de seuil, il existe un certain paramètre  $p_0 \in [0, 1]$  tel que, lorsque  $p$  franchit le seuil  $p_0$ , les propriétés de  $A$  changent radicalement :  $A$  passe de très peu probable à très probable. On peut qualifier ceci d'une "transition de phase de nature probabiliste". Dans un article de 1994, Michel Talagrand, en s'inspirant d'un travail de Lucio Russo, dit que :

« Il y a un effet de seuil dès que  $A$  dépend peu de chacune des coordonnées. »

Dans ce TER, on se demandera comment formaliser la phrase «  $A$  dépend peu de chacune des coordonnées ».

On verra qu'il y a là plusieurs possibilités intéressantes, on pourra les comparer les unes aux autres, et on utilisera une propriété d'instabilité – appelée hypercontractivité – afin de démontrer un théorème général qui donne un sens à la phrase de Talagrand ci-dessus. (Une possibilité est aussi de s'intéresser à différentes applications, qui peuvent être liées à la géométrie de graphes aléatoires, à la physique statistique ou à l'informatique théorique.)

### Prérequis

Cours de probabilités de L3 et M1.

### Bibliographie

Michel Talagrand, On Russo's approximate zero-one law, *Annals of Probability*, 22(3), 1576-1587, 1994. (Introduction.) <https://doi.org/10.1214/aop/1176988612>

Christophe Garban et Jeffrey Steif, *Noise sensitivity of Boolean functions and percolation*, Cambridge University Press, IMS Textbooks series, 2014. (Chapitres 1 et 3.) <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/garban/book.html>

## 9 Équations d'évolution unitaires en régime adiabatique

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, potentiellement  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ ,  $\psi_0$  un élément de  $\mathcal{H}$ , et  $H$  une fonction définie sur  $[0, 1]$ , à valeurs dans l'espace des endomorphismes bornés auto-adjoints de  $\mathcal{H}$ , que l'on suppose de classe  $C^\infty$  en norme opérateur.

On se propose d'étudier les solutions de l'équation d'évolution

$$i\epsilon\partial_t\psi(t) = H(t)\psi(t),$$

pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , avec condition initiale  $\psi(0) = \psi_0$ . Plus précisément, on souhaite analyser le comportement des solutions  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  dans la limite singulière  $\epsilon \rightarrow 0$ , en fonction des propriétés spectrales des opérateurs  $H(t)$ .

Dans le cas emblématique, on suppose que, pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , l'endomorphisme  $H(t)$  possède une valeur propre simple  $E(t)$  isolée, associée à un vecteur propre convenablement normalisé  $\varphi(t)$ , et que la fonction  $E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue. Pour la condition initiale  $\psi_0 = \varphi(0)$ , on peut alors montrer que, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\psi(t) = \exp\left(-i/\epsilon \int_0^t E(s)ds\right) \varphi(t) + O(\epsilon),$$

pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , ce qui constitue une instance de ce qu'on appelle communément *l'approximation adiabatique*.

Il s'agira d'établir ce résultat et quelques unes de ses nombreuses généralisations, et d'explorer les méthodes permettant d'y parvenir.

### Prérequis

Un peu d'algèbre linéaire et un peu de théorie des ÉDO linéaires.

### Bibliographie

Avron, J.E., Seiler, R., Yaffe, L.G., Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect, *Commun. Math. Phys.* **110** (1987), pp. 33–49.

Hagedorn, G., Joye, A., Elementary Exponential Error Estimates for the Adiabatic Approximation, *J. Mathematical Analysis and Applications* **267**, (2002), pp. 235–246.

Kato, T., On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics, *J. Phys. Soc. Japan*, **5** (1950), pp. 435–439.

Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1980.

Nenciu, G., On the adiabatic theorem of quantum mechanics, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **13** (1980), pp. 15–18.

## 10 Existence de géodésiques fermées sur les surfaces

Considérons une surface  $\Sigma$ . Une géodésique  $\Gamma$  sur la surface  $\Sigma$  est une courbe qui (localement) réalise le plus court chemin entre deux points quelconques de  $\Gamma$ . Si  $\Sigma$  est compacte, étant donnés deux points de  $\Sigma$ , il existe toujours une géodésique les reliant. Une question plus difficile est de savoir s'il existe toujours une géodésique *fermée* sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire une géodésique se refermant sur elle-même. Un théorème dû à Birkhoff affirme que pour  $\Sigma$  compacte, c'est le cas. Le but de ce TER sera de comprendre la preuve, au moins pour certaines surfaces.

### Prérequis

Un goût pour l'analyse et la géométrie ; suivre le cours de géométrie différentielle au second semestre serait un plus appréciable.

### Bibliographie

T.H. Colding, W.P. Minicozzi, *Min-max for sweep-outs by curves*. <https://arxiv.org/abs/math/0702625>

## 11 Fonctions harmoniques et marches aléatoires sur les graphes infinis

Un théorème de Pólya dit que la marche aléatoire sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  est transiente pour  $d \leq 2$  et récurrente pour  $d \geq 3$ . Dans ce TER, on considèrera plus généralement des marches aléatoires sur des graphes. On verra que la récurrence/transience du graphe est liée à l'existence ou la non-existence de certaines fonctions harmoniques discrètes. Plus précisément, on étudiera les deux questions suivantes :

- (a) dans quelle mesure la géométrie du graphe détermine-t-elle la récurrence de la marche aléatoire ?
- (b) existe-t-il des fonctions harmoniques discrètes positive, ou bornées, sur le graphe ?  
Et si oui, comment les construire ?

Nous verrons plusieurs exemples de manifestation de (a), notamment les graphes de Cayley de groupes finiment engendrés et les graphes obtenus à partir d'empilements de cercles dans  $\mathbb{R}^2$ .

Pour (b), on étudiera par exemple le cas de  $\mathbb{Z}^d$  et des graphes de Cayley des groupes libres, et on montrera éventuellement qu'on peut construire toute fonction harmonique discrète positive en résolvant un problème de Poisson avec un certain « bord » du graphe à l'infini que l'on construira.

### Prérequis

Les enseignements du premier semestre. Un intérêt pour l'analyse, les probabilités, la géométrie.

### Bibliographie

W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics (138), 2000. <https://www.math.tugraz.at/~woess/rwbook-corr>

## 12 Groupes simples d'ordre 168

Il s'agit de démontrer l'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un groupe simple  $G$  à 168 éléments, éventuellement par deux méthodes différentes.

En guise d'échauffement, on pourra commencer par démontrer la simplicité du groupe  $\mathrm{PSL}(E)$ , lorsque  $E$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  (à condition que  $|k| \geq 5$  si  $n = 2$ ), puis en déduire l'existence de  $G$ .

On pourra également retrouver le fait que  $\mathrm{PSL}(\mathbf{F}_2^3) = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$  est simple, en étudiant ses classes de conjugaison.

Ensuite, pour démontrer l'unicité de  $G$ , on pourra s'intéresser au plan de Fano, ou montrer que  $G$  est isomorphe à  $\mathrm{PSL}(\mathbf{F}_7^2)$  via l'utilisation de la droite projective et des homographies.

Beaucoup de prolongements sont possibles : démonstration du critère d'Iwasawa, application à la simplicité de groupes de nature géométrique...

### Prérequis

Programme de théorie des groupes de L3A (Sylow et produits semi-directs en particulier), algèbre linéaire.

### Bibliographie

Sur la simplicité de  $\mathrm{PSL}(E)$  : à voir avec l'encadrant · e.

Sur l'unicité d'un groupe simple d'ordre 168 :

– Via le plan de Fano : Timothy L. Vis, The existence and uniqueness of a simple group of order 168. <https://web.archive.org/web/20100705011726/http://math.ucdenver.edu/~tvis/Coursework/Fano.pdf>

– Via la droite projective : Pascal Ortiz, Exercices d'algèbre, Ellipses, Collection CAPES-Agrégation (2004).

## 13 Homéomorphismes du cercle préservant l'orientation

Notons  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  le tore unidimensionnel, qu'on voit comme un cercle. Tout homéomorphisme  $T$  de  $\mathbf{T}$  s'obtient par passage au quotient d'une application continue et strictement monotone  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que la fonction  $x \mapsto f(x+1) - f(x)$  est constante égale à  $+1$  ou à  $-1$ . Une telle application  $f$  est alors unique à constante additive entière près. Lorsque la constante  $f(x+1) - f(x)$  vaut  $+1$ , on dit que  $T$  préserve l'orientation.

L'exemple le plus simple est celui où la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  est constante. Dans ce cas,  $T$  est une translation du groupe  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , qu'on voit comme une rotation du cercle.

Les principaux résultats sur les homéomorphismes du cercle préservant l'orientation sont les suivants.

1. Existence de la limite  $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1}(f^n(x) - x)$ .

Cette limite ne dépend pas de  $x$ . Sa classe dans  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  ne dépend que de  $T$  et s'appelle nombre de rotation de  $T$ , noté  $\bar{\alpha}(T)$ .

2. Le nombre de rotation  $\bar{\alpha}(T)$  dépend continûment de  $T$  et est invariant par conjugaison entre homéomorphismes préservant l'orientation.

3. Si  $\bar{\alpha}(T)$  est irrationnel et si les orbites sous l'action de  $T$  sont denses dans  $\mathbf{T}$ , alors  $T$  est conjugué à la rotation irrationnelle  $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ , pour  $\alpha = \bar{\alpha}(T)$ .

4. Si  $\bar{\alpha}(T)$  est irrationnel, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(T^n(x))_{n \geq 0}$  ne dépend pas de  $x$ . Cet ensemble vaut soit  $\mathbf{T}$  tout entier, soit un fermé de  $\mathbf{T}$  d'intérieur vide sans point isolé, et s'appelle ensemble dérivé de  $T$ .

5. Inversement, pour tout fermé  $P$  d'intérieur vide sans point isolé dans  $\mathbf{T}$ , on peut construire un difféomorphisme préservant l'orientation dont  $P$  est l'ensemble dérivé.

6. Si  $\bar{\alpha}(T)$  est irrationnel, alors  $T$  est uniquement ergodique, i.e.  $T$  possède une unique probabilité invariante, et cette probabilité est portée par l'ensemble dérivé de  $T$ .

7. (Théorème de Denjoy) Si  $\bar{\alpha}(T)$  est irrationnel et si  $T$  est représenté par une application  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  dont la dérivée est à variation bornée, alors  $T$  est conjugué à une rotation.

Il s'agit de bien comprendre les bases de ces résultats, en détaillant leurs preuves, jusqu'au théorème 4 au moins. On peut aussi aller plus loin, par exemple en s'intéressant à la notion d'unique ergodicité de façon plus approfondie, avec le théorème d'Oxtoby.

### Prérequis

Il faut un peu d'aisance en topologie et avec les applications quotients. La théorie de la mesure intervient dans les théorèmes 6 et 7.

### Bibliographie

I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer (1982). <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-1-4615-6927-5.pdf>

M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, Cambridge University Press (2002).

## 14 Interpolation de Riesz-Thorin et applications

Soit  $T$  une application linéaire continue de  $L^{p_0}(\mu)$  dans  $L^{q_0}(\nu)$ , avec norme  $M_0$ , et également de  $L^{p_1}(\mu)$  dans  $L^{q_1}(\nu)$ , avec norme  $M_1$ . Alors, pour tout  $p$  entre  $p_0$  et  $p_1$ ,  $T$  est continue de  $L^p(\mu)$  dans un certain  $L^q(\nu)$ , avec norme contrôlée en termes de  $p$ ,  $M_0$  et  $M_1$ .

On démontrera ce résultat par une méthode d'analyse complexe. Puis on pourra l'appliquer à la transformation de Fourier sur  $\mathbb{R}^d$ , et ainsi, entre autres, obtenir des renseignements sur le comportement au cours du temps des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire  $i \partial_t u - \Delta u = 0$ .

### Prérequis

Espaces  $L^p$  sur un ouvert, inégalité de Hölder. Notions sur les fonctions holomorphes.

### Bibliographie

J. Bergh et J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, 1976.

## 15 Localisation effective de racines de polynômes

Pour un polynôme  $P$ , il s'agit de déterminer de manière effective des intervalles d'isolation des racines réelles de  $P$  (si  $P$  est à coefficients réels) ou des boules du plan complexe (pour la norme euclidienne ou pour la norme du maximum) contenant une racine et une seule.

Plusieurs algorithmes pourront être étudiés : élimination des multiplicités (algorithme de Yun, PGCD modulaire) et racines rationnelles ou dans  $\mathbb{Q}[i]$  si les coefficients sont exacts, suites de Sturm, algorithmes utilisant la règle des signes de Descartes dans le cas réel, méthodes itératives approchées (Newton, homotopie, valeurs propres de la matrice companion), autres.

### Bibliographie

B. Parisse, Algorithmes de calcul. On pourra rechercher des mots clefs du résumé ci-dessus, dans l'index de la page. <https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/giac/doc/fr/algo.html>

Michael Eisermann. The Fundamental Theorem of Algebra Made Effective : An Elementary-Algebraic Proof via Sturm Chains. *The American Mathematical Monthly* 119, no.

9, Mathematical Association of America, 2012, 715–52. <https://arxiv.org/abs/0808.0097>

Fabrice Rouillier, Paul Zimmermann. Efficient isolation of polynomial's real roots. Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, 2004, 162 (1), 33-50. <https://hal.inria.fr/inria-00072518>

## 16 Marches aléatoires dans le quart de plan

Les marches aléatoires dans le quart de plan  $Q = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont l'objet de nombreuses études car elles ont des applications riches et nombreuses en combinatoire, finance, biologie, analyse complexe, files d'attente, etc.

On s'intéresse ici aux marches aléatoires aux plus proches voisins, absorbées quand elles atteignent le bord du domaine. On fixe un ensemble  $S \subset \{-1, 0, 1\}^2$  de déplacements possibles. Partant d'une position  $(i, j)$  dans  $Q$ , la marche va en  $(i, j) + s$  avec probabilité  $p_s$ , pour chaque  $s$  dans  $S$ , et, quand elle atteint le bord  $\partial Q = (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$ , elle ne bouge plus.

On fixe  $(i_0, j_0)$  dans  $Q$  et on veut étudier les probabilités d'atteindre chaque point  $(i, 0)$  et  $(0, j)$  de  $\partial Q$  à l'instant  $n$  quand on part de  $(i_0, j_0)$ . Notons ces probabilités  $h_{i,n}$  et  $v_{j,n}$  respectivement et considérons les fonctions génératrices associées

$$h(x, t) = \sum_{i \geq 0, n \geq 0} h_{i,n} x^i t^n \quad v(y, t) = \sum_{j \geq 0, n \geq 0} v_{j,n} y^j t^n$$

En utilisant des méthodes d'analyse complexe, on peut donner des formules intégrales pour ces fonctions. Pour des déplacements aux plus proches voisins et de moyenne nulle, donc si

$$\sum_{s \in S} p_s s = (0, 0) \quad \text{et} \quad S \subset \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$$

on pourra par exemple déduire de ces formules que la distribution du premier temps d'atteinte  $\tau$  de  $\partial Q$  par la marche partant de  $(i_0, j_0)$  vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \mathbb{P}_{i_0, j_0}(\tau \geq n) = \frac{i_0 j_0}{\pi \sqrt{p_{1,0} p_{0,1}}}$$

### Prérequis

Les cours de probabilités et de fonctions holomorphes du premier semestre.

### Bibliographie

Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, Vadim Malyshev, Random walks in the quarter-plane, Algebraic methods, boundary value problems and applications, Applications of Mathematics (New York), vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Kilian Raschel, Random Walks in the Quarter Plane Absorbed at the Boundary : Exact and Asymptotic. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00361951>

Page web de Kilian Raschel. <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~raschel>

## Note

Trois mathématiciens viennent de recevoir le prix Robbins 2022 pour leurs travaux sur ce sujet. D'après l'annonce du prix sur le site de l'AMS :

*Alin Bostan, Irina Kurkova, and Kilian Raschel will receive the 2022 AMS David P. Robbins Prize for their paper “A human proof of Gessel’s lattice path conjecture,” published in Transactions of the American Mathematical Society in 2017. <https://arxiv.org/abs/1309.1023> The paper proves highly nontrivial enumeration results on a family of lattice paths known as Gessel walks. These simple-to-describe walks have a surprisingly beautiful enumeration that withstands standard combinatorial techniques. The proof makes an inspired use of experimentation to connect the problem with a remarkable identity involving elliptic functions. Unlike previous arguments, this novel proof method avoids any reference to large-scale computation. [https://www.ams.org/news?news\\_id=6853](https://www.ams.org/news?news_id=6853)*

## 17 Nombres de Hurwitz

Les nombres de Hurwitz comptent les nombres de revêtements ramifiés holomorphes de la sphère et peuvent se calculer par des méthodes combinatoires. Les séries génératrices construites à partir de ces nombres possèdent des propriétés étonnantes qui nous viennent tout droit de la théorie des cordes en physique, notamment du phénomène appelé symétrie miroir.

L'objectif du stage sera de calculer ces nombres et de découvrir leurs propriétés et leurs relations avec le monde des surfaces de Riemann.

On pourra même introduire le formalisme d'Eynard-Orantin pour généraliser les nombres d'Hurwitz et aller plus loin.

### Prérequis

Un peu de groupe symétrique, de fonctions holomorphes, de géométrie, de combinatoire.

### Bibliographie

Renzo Cavalieri, Eric Miles, Riemann surfaces and algebraic curves, A first course in Hurwitz surfaces, Cambridge University Press, 2016.

## 18 Opérateurs d'intégrales singulières

Voici un théorème : Soit  $p > 1$  fini. Si la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  et si  $\Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ .

Un aspect remarquable de ce résultat est qu'une information sur le laplacien suffit à en obtenir sur *toutes* les dérivées partielles d'ordre 2.

Dans ce stage, on verra comment le démontrer. Pour cela, on étudiera des opérateurs  $T : f \mapsto Tf$  de la forme

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy,$$

où  $K$  est une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , appelée le noyau de  $K$ , vérifiant certaines hypothèses de taille et de régularité. On montrera que, sous certaines hypothèses, les opérateurs  $T$  sont continus sur  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , pour  $p > 1$  fini. On donnera aussi des applications à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure.

### Bibliographie

Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs II*, Hermann, 1990.

## 19 Paradoxe de Banach-Tarski

Le paradoxe de Banach-Tarski est célèbre sous la forme suivante : une boule dans  $\mathbb{R}^3$  peut être divisée en un nombre fini de morceaux (non mesurables) avec lesquels on peut reconstruire deux boules de la même taille. L'énoncé initial du paradoxe est bien plus fort : dans  $\mathbb{R}^n$ , tous les ensembles  $A$  et  $B$  d'intérieurs bornés et non vides sont équi-décomposables, en d'autres termes, on peut décomposer  $A$  en un nombre fini de morceaux à partir desquels on peut reconstruire  $B$ .

Le but principal du TER sera de comprendre la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski à partir des articles originaux de Stefan Banach et Alfred Tarski, que ces deux mathématiciens polonais ont écrits en français. Le cas échéant, on pourrait s'aventurer à examiner l'échec du paradoxe en dimension 2, ou bien le nombre minimal de morceaux nécessaires à un dédoublement de la boule, ou encore le rôle de l'axiome du choix dans la validité du théorème.

### Prérequis

De l'algèbre et de la topologie de L3, et une absence d'aversion pour la logique mathématique.

## Bibliographie

Stefan Banach, Alfred Tarski (1924), Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fundamenta Mathematicae*.

Felix Hausdorff (1914), Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, *Mathematische Annalen* (optionnel).

Casimir Kuratowski (1924), Une propriété des correspondences biunivoques, *Fundamenta Mathematicae*.

Stan Wagon (1985), *The Banach Tarski Paradox*, Cambridge University Press.

## 20 Primitives de la fonction gaussienne et fonctions usuelles

Le premier but de ce TER est de démontrer le théorème de Liouville-Rosenlicht, qui caractérise les fonctions dont les primitives sont élémentaires, i.e. peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles (exponentielles, logarithmes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques...) dans un sens à préciser. On montrera alors que de nombreuses primitives de fonctions usuelles, telle que les primitives de la fonction gaussienne  $x \mapsto e^{-x^2}$ , ne s'expriment pas ainsi.

On s'intéressera ensuite au cas plus complexe des fonctions solutions de l'équation d'Airy  $u'(t) = t - u(t)^2$ , pour lesquelles le théorème de Liouville ne suffit plus. Pour traiter ce cas, il faudra s'initier à la théorie de Galois différentielle, qui est le pendant de la théorie de Galois, mais pour les équations différentielles.

En guise de prolongement, on pourra, soit approfondir la théorie de Galois différentielle (correspondance de Galois, structure du groupe de Galois, etc.), soit s'intéresser au théorème de Ritt, qui caractérise les fonctions élémentaires dont les inverses sont aussi élémentaires.

Remarque : malgré les apparences, ce résultat est un résultat d'algèbre qui concerne les extensions de corps différentiels, i.e. les corps munis d'un opérateur de dérivation.

### Prérequis

Aucun, à part peut-être un peu de théorie des corps.

## Bibliographie

Sur le théorème de Liouville :

– Denis Feldmann, Note sur le théorème de Liouville. <https://denisfeldmann.fr/PDF/liou.pdf>

– M. Rosenlicht, Liouville's theorem on functions with elementary integrals, *Pacific Journal of Mathematics* **24**, No 1, 1968. <https://msp.org/pjm/1968/24-1/pjm-v24-n1->

p16-p.pdf

Sur l'équation d'Airy :

– John Hubbard, Benjamin Lundell, A first look at differential algebra. <http://pi.math.cornell.edu/~hubbard/diffalg1.pdf>

Sur le théorème de Ritt :

– J. F. Ritt, Elementary functions and their inverses, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 27, No. 1 (1925), 68-90. <https://www.jstor.org/stable/1989165>

Sur la théorie de Galois différentielle :

– Andy R. Magid, Lectures on differential Galois theory, AMS, University Lecture Series (no. 7), 1994.

– Marius van der Put, Michael F. Singer, Galois theory of linear differential equations, Springer-Verlag, Grund. math. Wiss. (no. 328), 2003.

## 21 Processus de Galton Watson

Les processus de Galton Watson, aussi appelés processus de branchement, sont des modèles de reproduction de populations. D'après la page wikipédia :

*À l'origine, ce modèle a été introduit par Bienaymé en 1845 et indépendamment par Galton en 1873 en vue d'étudier la disparition des patronymes.*

*Supposons que chaque adulte mâle transmette son patronyme à chacun de ses enfants. Supposons également que le nombre d'enfants de chaque homme soit une variable aléatoire entière (et que la distribution de probabilité soit la même pour tous les hommes dans une lignée). Alors, un patronyme dont les porteurs ont un nombre d'enfant strictement inférieur à 1 en moyenne est amené à disparaître. Inversement, si le nombre moyen d'enfants est supérieur à 1, alors la probabilité de survie de ce nom est non nulle et en cas de survie, le nombre de porteurs du patronyme connaît une croissance exponentielle.*

Si la loi de reproduction  $\mu$  a une espérance  $m$  et une fonction génératrice  $g$ , en notant  $q$  la probabilité d'extinction, on montrera les résultats suivants.

**Théorème 1** *Si  $m < 1$  (cas sous-critique), alors  $q = 1$ . Si  $m = 1$  et  $\mu \neq \delta_1$  (cas critique), alors  $q = 1$ . Si  $m > 1$  (cas sur-critique), alors  $q < 1$  et  $q$  est le plus petit point fixe de  $g$  et le seul dans  $[0, 1]$ .*

Si on note  $Z_n$  l'effectif de la génération  $n$ ,  $W_n = Z_n/m^n$  est une martingale qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $W$ . On se demande alors si  $P(W = 0) = q$ . Ce n'est pas toujours le cas ainsi que l'énonce le théorème suivant.

**Théorème 2 (Kesten-Stigum 1966)** *On suppose que  $m > 1$ . Alors  $P(W = 0) = q$  si et seulement si  $E[W] = 1$  si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 2} (k \log k) \mu(k)$  converge.*

On pourra étudier plusieurs preuves de ce résultat, probabilistes et analytiques. L'une de ces preuves utilise la notion de processus de branchement avec immigration. On établira aussi des résultats plus fins sur les vitesses de convergence de  $P(Z_n > 0)$  vers 0 dans les cas sous-critique et critique.

### Prérequis

Le cours de probabilités du premier semestre.

### Bibliographie

R. Lyons, Y. Peres (2017), Probability on Trees and Networks, Cambridge University Press. <https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree>

R. Lyons, R. Pemantle, Y. Peres (1995). Conceptual proofs of Llog L criteria for mean behavior of branching processes. Ann. Probab. 23, 1125–1138. <https://arxiv.org/abs/math/0404083>

S. Asmussen, H. Hering (1983). Branching Processes. Birkhäuser, Basel. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4615-8155-0>

## 22 Quelques propriétés de l'opérateur divergence

Pour toute fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable, la divergence de  $u$  est définie par

$$\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x_i}.$$

Ce TER est consacré à l'étude des équations  $\operatorname{div} u = f$  et  $\operatorname{div} u = \mu$ , où  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  est une fonction et  $\mu$  est une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

Par exemple, on montrera que, si  $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est de classe  $C^1$  avec  $1 \leq p \leq \frac{n}{n-1}$  et si  $\operatorname{div} u = \mu$ , alors  $\mu = 0$ . Plus généralement, on examinera les liens entre les propriétés de  $f$  ou de  $\mu$ , et les propriétés de la solution  $u$ .

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure et en calcul différentiel.

### Bibliographie

Eduard Curcà, On the existence of vector fields with nonnegative divergence in rearrangement invariant spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **69** (1), 119-136, 2020.

Nguyen Cong Phuc, Monica Torres, Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields, *Indiana Univ. Math. J.* **57** (4), 1573-1597, 2008.

## 23 Représentation (info)graphique d'inéquations en deux variables

On s'intéresse ici à la représentation sur une matrice de pixels carrés, par exemple un écran de calculatrice de résolution  $320 \times 222$ , de la solution d'une inéquation ou d'un système d'inéquations en deux variables. Plusieurs types d'inéquations pourront être étudiés : cas linéaire, cas du disque, se ramenant au second degré en une variable (en particulier les coniques), équations polynomiales, cas général.

### Algorithmes/Références

Algorithme de Bresenham. <http://raphaello.univ-fcomte.fr/Ig/Algorithme>

Parcours de Graham : calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'intersection (pour les systèmes linéaires). [https://fr.wikipedia.org/wiki/Parcours\\_de\\_Graham](https://fr.wikipedia.org/wiki/Parcours_de_Graham)

Utilisation du résultant pour trouver les points d'intersection dans le cas de systèmes d'inéquations polynomiales.

## 24 Réseaux euclidiens et applications arithmétiques

On appelle réseau euclidien tout sous-groupe de  $\mathbf{R}^n$  de la forme  $\mathbf{Z}e_1 + \dots + \mathbf{Z}e_n$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbf{R}^n$ . On dit alors que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une  $\mathbf{Z}$ -base du réseau.

On appelle sous-réseau de  $\mathbf{R}^n$  tout sous-groupe de  $\mathbf{R}^n$  de la forme  $\mathbf{Z}e_1 + \dots + \mathbf{Z}e_p$  où  $(e_1, \dots, e_p)$  est une famille libre de  $\mathbf{R}^n$ .

Les sous-réseaux de  $\mathbf{R}^n$  sont exactement les sous-groupes discrets de  $\mathbf{R}^n$ .

Si  $\Gamma$  est un réseau de  $\mathbf{R}^n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\Gamma$ , alors le parallélépipède semi-ouvert

$$P := \sum_{i=1}^n [0, 1[ \cdot e_i$$

est un système de représentants du quotient  $\mathbf{R}^n/\Gamma$ , appelé domaine fondamental. Son volume ne dépend pas du choix de la base.

Le théorème de Minkovski assure que toute partie convexe symétrique par rapport à 0 et de mesure de Lebesgue strictement supérieure à celle de  $2P$  contient au moins un autre point du réseau  $\Gamma$ . Si l'on suppose de plus que la partie est compacte, il suffit que sa mesure de Lebesgue soit supérieure ou égale à celle de  $2P$ .

Ce théorème a de jolies conséquences et permet notamment de prouver le théorème des deux carrés (tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés) et le théorème des quatre carrés (tout entier positif est somme de quatre carrés).

Si on le souhaite, on peut pousser plus loin, vers le théorème des unités de Dirichlet, qui donne la structure du groupe des éléments inversibles de l'anneau des entiers d'une

extension finie de  $\mathbb{Q}$ .

Il s'agit a minima de bien comprendre les bases, la preuve du théorème de Minkovski et une de ses conséquences en détaillant davantage les preuves.

### Prérequis

Ce sujet est à l'interface entre algèbre, géométrie et topologie. La structure des groupes abéliens libres de type fini intervient de façon importante mais elle peut être abordée sans entrer dans la généralité des modules sur un anneau commutatif.

### Bibliographie

P. Tauvel, *Géométrie*, Dunod (2005).

D. Guin, *Algèbre, tome 1, groupes et anneaux*, Belin (2005).

Wikipédia, page *Réseau (géométrie)*. [https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9seau\\_\(g%C3%A9om%C3%A9trie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9seau_(g%C3%A9om%C3%A9trie))

## 25 Sous-groupes finis du groupe linéaire

Si les sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{C})$  peuvent être de taille arbitraire, comme on le voit dès la dimension  $n = 1$ , la taille des sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{Q})$  est bornée (par exemple une matrice d'ordre premier est d'ordre au plus  $n+1$ ). On établira la borne multiplicative due à Minkowski, ainsi que son optimalité, et on étudiera le théorème de Schur qui en étend la validité.

Par ailleurs la structure des sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{C})$  est contrainte par le théorème de Jordan, qui énonce l'existence d'un nombre fini  $f(n)$  tel que tout sous-groupe fini contienne un sous-groupe distingué *abélien* d'indice au plus  $f(n)$ . En suivant la méthode de Frobenius on établira une telle borne explicite. On pourra s'intéresser au cas  $n = 2$ , pour lequel  $f(2) = 60$ .

### Prérequis

Cours d'Algèbre de L3 et M1.

### Bibliographie

Richard Antetomaso (2014), *Autour du théorème de Jordan sur les sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{C})$* , RMS vol. 124, n° 3.

Robert M. Guralnick, Martin Lorenz, *Orders of finite groups of matrices*, Contemporary Mathematics n° 420, 141–162 (2006). <https://arxiv.org/abs/math/0511191>

Jean-Pierre Serre, *Finite groups : an introduction*, International Press, 2016 : chapitre 9. Sujet d'agrégation *Mathématiques Générales* 2003, partie II. <https://agreg.org/>

## 26 Réalisabilité de groupes (ex-sujet mystère n° 1)

Un groupe peut souvent (et en fait, toujours) être vu comme un (sous-)groupe de transformations d'un objet ou d'automorphismes d'une structure algébrique. Cette technique permet souvent de récupérer des informations sur la structure du groupe et de ses éléments. On peut cependant se poser la question inverse :

Un type de structure algébrique (groupe, graphe, anneau, etc.) étant donné, tout groupe peut-il être vu comme le groupe d'automorphismes d'une de ces structures ?

La réponse est compliquée en général donc nous en étudierons des cas particuliers, en considérant principalement le cas des groupes et celui des graphes. En fonction du degré d'avancement du travail, on pourra considérer des structures plus exotiques.

### Prérequis

Cours d'algèbre de L3 et de M1.

### Bibliographie

Frucht, R., Graphs of Degree Three with a Given Abstract Group. *Canadian Journal of Mathematics*, 1(4), 365-378, 1949. <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-033-6>

Kollár, J., Fried, E., Automorphism Groups of Algebraic Number Fields. *Mathematische Zeitschrift*, 163,121-124, 1978. <https://eudml.org/doc/172744>

Ore, O., *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, 1962.

Sabidussi, G., Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretical Properties. *Canadian Journal of Mathematics*, 9, 515-525, 1957. <https://doi.org/10.4153/CJM-1957-060-7>

## 27 Jeu de policiers-voleur (ex-sujet mystère n° 2)

Le jeu de policiers-voleur est un jeu à deux joueurs. Chaque joueur déplace des pions sur les sommets d'un graphe donné, l'un déplace les pions qui représentent les policiers et l'autre le pion qui représente le voleur.

Le but sera de comprendre quel est le nombre minimal de policiers qui assure l'existence d'une stratégie gagnante pour les policiers. Nous regarderons le problème sur certaines classes de graphes, dont les graphes planaires.

### Prérequis

Aucun, une familiarité avec les notions de théorie des graphes pourra aider mais elle n'est pas requise.

## Bibliographie

Martin Aigner et Michael Fromme, A game of cops and robbers. *Discrete Applied Mathematics*, 8(1),1-12, 1984.

Roger Mansuy, Pac-Man contre les fantômes, *La Recherche*, 513, 2016.

## 28 Introduction à l'informatique quantique (ex-sujet mystère n° 3)

Si la réalisation pratique d'ordinateurs quantiques est très difficile, le cadre théorique sous-jacent est, lui, bien compris depuis plusieurs décennies. On se propose dans ce TER de commencer par étudier ce cadre, et en particulier de définir ce qu'est un état d'un système composé de plusieurs qubits, et les opérations effectuées dessus : portes logiques, mesures. On présentera ensuite quelques algorithmes quantiques et des applications à l'arithmétique.

Mots-clés :  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie, endomorphismes unitaires, endomorphismes autoadjoints, transformée de Fourier discrète.

## Bibliographie

P. Arrighi, S. Perdrix, *Modèles de calcul quantique*, dans *Informatique mathématique, Une photographie en 2016*, E. Baudrier et L. Mazo (eds), CNRS Editions, 2016. Disponible sur le site de S. Perdrix, voir *Notes de cours*. <https://members.loria.fr/SPerdrix/pepites-algorithmiques-informatique-quantique/>

## 29 Résolution algébrique de systèmes polynomiaux multivariés (ex-sujet mystère n° 4)

De nombreux problèmes de mathématiques, d'informatique ou d'ingénierie peuvent se ramener à des systèmes d'équations polynomiales en plusieurs variables. La résolution de tels systèmes, bien que généralement difficile, est donc un problème fondamental. Le but de ce TER est d'étudier une méthode de résolution dite « algébrique », qui consiste à déduire du système initial un système plus simple, correspondant à une base de Gröbner de l'idéal associé pour l'ordre lexicographique. On présentera en particulier l'algorithme de Lazard-Macaulay de calcul de bases de Gröbner ainsi que l'algorithme FGLM de changement d'ordre monomial.

Mots-clés : idéaux de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , algèbre linéaire, pivot de Gauss

## Bibliographie

D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, 2007. (Chapitres

1 et 2.) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-35651-8>

J.-C. Faugère, M. Safey el Din, *De l'algèbre linéaire à la résolution des systèmes polynomiaux*, dans *Mathématiques Appliquées (L3)*, Pearson, pp. 331–388, 2009. <https://www-polsys.lip6.fr/~jcf/Papers/CoursSafeyFaugere.pdf>

## 30 Théorème des nombres premiers

Le (fameux) théorème des nombres premiers affirme que le nombre de nombres premiers inférieurs à un réel  $x$  est équivalent, lorsque  $x$  tend vers l'infini, à  $x/\ln x$ .

Ce résultat a été conjecturé au XVIII<sup>ème</sup> siècle par Legendre et Gauss, et démontré pour la première fois en 1896 par Hadamard et par de La Vallée Poussin, indépendamment.

On propose ici de découvrir la preuve de ce théorème, par exemple en suivant celle donnée au chapitre XII du livre en référence.

### Prérequis

Notions d'analyse complexe.

### Bibliographie

H. Queffélec et C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4<sup>ème</sup> édition, Dunod, 2013.

## 31 Vagues de spins et théorème de Mermin-Wagner

Commençons par citer les notes de Ron Peled et Yinon Spinka (voir la bibliographie) : le théorème de Mermin-Wagner nous dit « qu'il n'y a pas d'ordre à grande portée dans des modèles de spins avec une symétrie continue. »

Le but du TER est de comprendre ce que cette phrase, probablement incompréhensible pour le moment, veut dire, et d'étudier la preuve de ce théorème. Afin de commencer à éclaircir cette phrase, introduisons tout d'abord brièvement un modèle de spins appelé modèle d'Ising.

Donnons-nous un entier  $n$  et notons  $\Lambda_n = \{0, \dots, n\}^2$ . On appelle configuration de spins un élément de  $\{-1, 1\}^{\Lambda_n}$ . Autrement dit, un spin est juste  $-1$  ou  $1$  et, pour définir une configuration de spins, on quadrille le carré  $[0, n]^2$  et on place un spin sur chaque sommet de ce quadrillage.

Munissons-nous maintenant d'un paramètre  $T > 0$  (qu'on appelle la température). Le modèle d'Ising est donné par une loi de probabilité  $\mu_T$  sur  $\{-1, 1\}^{\Lambda_n}$  (dont la définition est assez courte) qui favorise l'alignement des spins (ce qui veut essentiellement dire que, si  $x$  et  $y$  sont deux sommets de  $\Lambda_n$  et si on sait que le spin en  $x$  vaut  $1$ , alors le spin en  $y$  a plus de chance de valoir  $1$  que  $-1$ ). (Ceci permet par exemple de modéliser des matériaux ferromagnétiques.)

Dans la première partie de ce TER, on étudiera le modèle d'Ising avec pour but de comprendre la propriété suivante : si  $T$  est assez petite, alors il y a un ordre à grande portée, dans le sens où le spin en  $x$  exerce une influence non négligeable sur le spin en  $y$  même quand  $x$  et  $y$  sont très éloignés.

Dans la deuxième partie du TER, on étudiera le modèle  $XY$ , qui est un analogue du modèle d'Ising dans lequel les spins prennent maintenant leur valeur dans le cercle unité  $\mathcal{C}$ . Le théorème de Mermin-Wagner nous dit que, cette fois, il ne peut plus y avoir d'ordre à grande portée. On étudiera un objet géométrique, basé sur la nature continue de  $\mathcal{C}$  et appelé vague de spins, qui nous permettra de démontrer ce théorème.

### **Prérequis**

Cours de probabilités de L3 et M1.

### **Bibliographie**

Ron Peled et Yinon Spinka, Lectures on the Spin and Loop  $O(n)$  Models. (Section 2.)  
<https://arxiv.org/abs/1708.00058>

Sacha Friedli et Yvan Velenik, *Statistical Mechanics of Lattice Systems : A Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge, Cambridge University Press, 2017. (Chapitres 3 et 9.) <https://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook/>