Université Grenoble Alpes — **Devoir surveillé 1**
mat 101 — **7 oct. 2019**
durée: 1h

Autour du cours.— Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soit A un sous-ensemble de F. Donner la définition de $f^{-1}(A)$.
2. Exprimer sous forme d'une assertion mathématique le fait que f soit surjective.

Exercice 1.— Soit A, B, C trois assertions. Quelles assertions sont toujours vraies (justifier vos réponses):

1. $((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (A \vee B)$,
2. $((A \vee B) \wedge C) \implies (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Exercice 2.— Pour chaque assertion ci-dessous, dire si l'assertion dépend d'un ou plusieurs paramètre. Traduire en une phrase française chaque assertion. Si l'assertion est close (c'est-à-dire ne dépend d'aucun paramètre), déterminer si elle est vraie ou fausse et le démontrer.

1. $\exists x, y \in \mathbb{Z}, (x < z) \wedge (z < y)$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Z}, (x < z) \wedge (z < y))$,
3. $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, (x < z) \wedge (z < y))$,

Exercice 3.— Traduire chaque énoncé ci-dessous sous forme d'une assertion mathématique, puis écrire la négation. Entre l'énoncé et sa négation, dire lequel est vrai, et le démontrer.

1. Pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - n$ est pair.
2. Pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - 2n$ est pair.
3. Tout nombre entier supérieur ou égal à 5 peut s'écrire sous la forme $3m+2n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$$

1. Écrire avec des quantificateurs l'assertion "f n'est pas bornée".
2. Donner un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction qui ne l'est pas. (On le démontrera dans les deux cas.)
3. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ obtenue en échangeant les deux quantificateurs ?
4. Montrer que f est bornée si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq f(x) \leq b$.
5. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, a \leq f(x) - f(y) \leq b.$$