Devoir Maison 1

Aucune fonction n'est ici supposée continue a priori, hormis les fonctions polynomiales.

À rendre pour le 15 Novembre 2019

Exercice 1 - Démonstration directe de la continuité de quelques fonctions

1) Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2) Soit f la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que si $0 < a < b$, il existe une constante $C_{a,b} > 0$ telle que :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq C_{a,b}|x - y|$$

(b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

(c) Démontrer par ailleurs que f est continue en 0. (Indépendant de (a) et (b)).

Exercice 2 - Fonctions indicatrices

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle *fonction indicatrice de* A et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
4. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\Delta B}(x) = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) \mod 2$. (où $x \mod 2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$ et Δ est la différence symétrique vue en TD.)

Exercice 3 - Continuité des fonctions trigonométriques

Notons $O = (0, 0)$ l'origine du plan $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions trigonométriques comme suit : partant du point $A = (1, 0)$, on parcourt le cercle unité dans le sens direct (antihoraire) sur une longueur θ, pour obtenir un point $M(\theta)$ du cercle $\mathcal{C}$. On note alors $\cos(\theta)$ l'abscisse et $\sin(\theta)$ l'ordonnée de $M(\theta)$, de sorte que $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

0) Sur une figure, placer le cercle unité $\mathcal{C}$, et les points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$, $M(\pi)$, $M(\frac{3\pi}{2})$, et $M(2\pi)$.

1) En utilisant la définition supra, expliquer les formules suivantes :

(a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$,

(b) $\forall\theta \in \mathbb{R}, |\cos(\theta)| \leq 1$, et $\forall\theta \in \mathbb{R}, |\sin(\theta)| \leq 1$

(c) $\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$

(d) $\forall\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

2) Soit $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On considère le triangle formé par les points O,$M(\theta)$, et $M(-\theta)$.

(a) Faire une figure de ce triangle et du cercle $\mathcal{C}$.

(b) Calculer la longueur $M(-\theta)M(\theta)$.

(c) D'après la construction précédente, quelle est la longueur de l'arc de cercle joignant $M(-\theta)$ et $M(\theta)$?

(d) Admettant que le chemin le plus court entre deux points est le segment de droite, en déduire l'inégalité $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$.

3) D'après la question 2, on a $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\sin(x)| \leq |x|$.

(a) En utilisant la question précédente, démontrer que la fonction sin est continue en 0.

(b) En utilisant la question 1, en déduire que cos est également continue en 0.

(c) En déduire que la fonction tan est continue en 0.

4) On admet les formules $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

(a) En déduire la continuité des fonctions cosinus et sinus en tout point $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire la continuité de la fonction tangente sur son domaine.

Exercice 4 - Une application entre ensembles

Soient E et F deux ensembles. Soit $f\colon E \to F$ une application.

On définit les fonctions $F_1\colon B \in \mathcal{P}(F) \mapsto f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$ et $F_2\colon A \in \mathcal{P}(E) \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(F)$.

1) On suppose f injective.

(a) Montrer que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

(b) En déduire que F_1 est surjective, et que F_2 est injective.

2) On suppose f surjective.

(a) Montrer que pour toute partie $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

(b) En déduire que F_1 est injective, et que F_2 est surjective.

3) On suppose f bijective.

(a) Montrer que F_1 et F_2 sont bijectives.

(b) Quelle est la bijection réciproque de F_1 ?

Exercice 5 - Théorème de Cantor

Il s'agit de démontrer le théorème (simplifié) suivant :

Théorème 1 (Cantor)**.** *Soit E un ensemble. Il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.*

On va donc fixer un ensemble E, et supposer par l'absurde l'existence d'une application surjective $f\colon E \to \mathcal{P}(E)$.

1) Poser $A = \{x \in E | x \notin f(x)\}$.

(a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$.

(b) En déduire une absurdité.

2) En déduire aussi qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Remarque : Ce théorème est essentiel dans l'étude des "cardinaux", c'est-à-dire des "tailles" d'ensemble. C'est la manière la plus simple de trouver un ensemble (ici, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) qui ne puisse pas être mis en bijection avec les entiers, et dont les éléments ne peuvent donc pas être rangés dans une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.