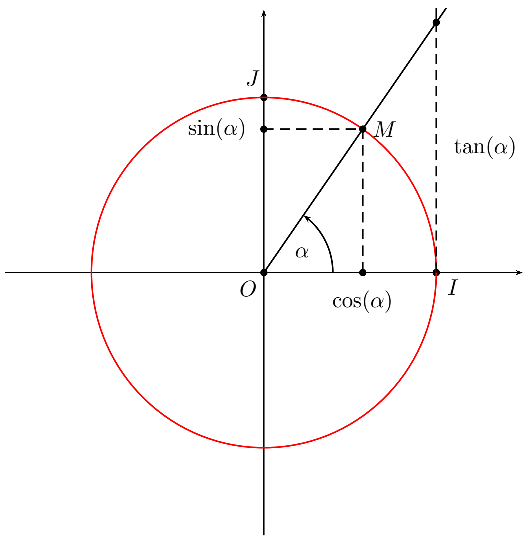
Formulaire de trigonométrie
Exercices d'application

20 février 2012

1 Formules trigonométriques

Le cercle trigonométrique



La formule fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Intervalles de valeurs

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Périodicité

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \tan(x + 2\pi) = \tan(x)$$

Valeur après demi-tour

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x) \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

Parité

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad \tan(-x) = -\tan(x)$$

Formules du complémentaire

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Formules du supplémentaire

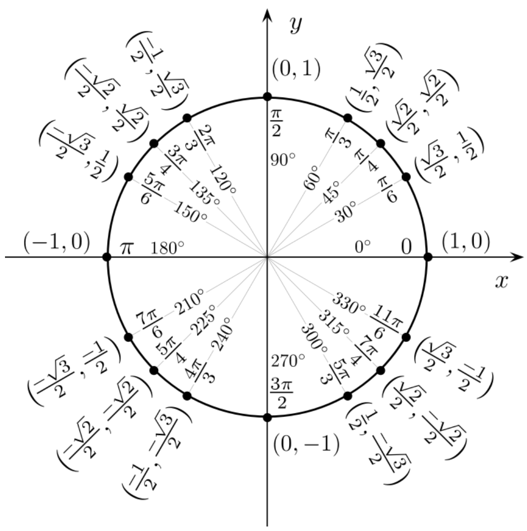
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Formules du quart de tour

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

Valeurs spéciales

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Relation avec l'exponentielle complexe

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

Duplication et addition

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

$$
\begin{array}{rcl}
\cos(x+y) & = & \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) & = & \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\sin(x+y) & = & \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\
\sin(x-y) & = & \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)
\end{array}
$$

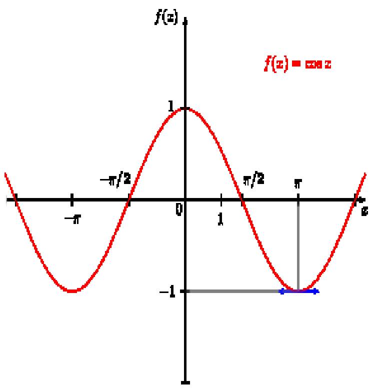
Formules de dérivation

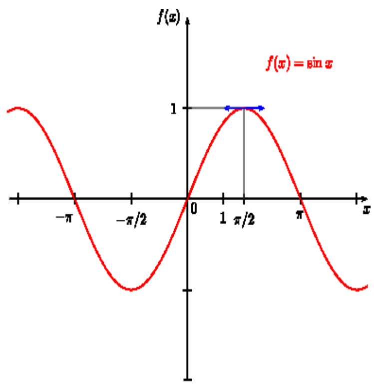
$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \sin'(x) = \cos(x) \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

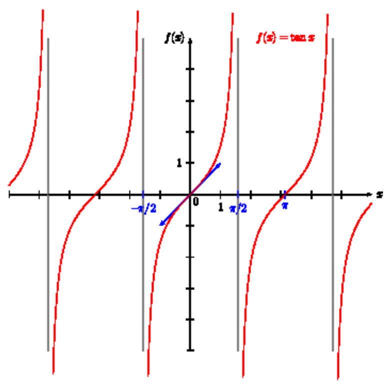
Limites classiques

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to \frac{-\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

Graphes des fonctions







2 Exercices

Exercice 1. A l'aide des formules d'addition, retrouver les formules suivantes :
Transformation de produit en somme

$$
\begin{array}{rcl}
\cos a \cos b & = & \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\
\sin a \sin b & = & \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\
\sin a \cos b & = & \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)
\end{array}
$$

Transformation de somme en produit

$$
\begin{array}{rcl}
\cos p + \cos q & = & 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\sin p + \sin q & = & 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\cos p - \cos q & = & -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\
\sin p - \sin q & = & 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})
\end{array}
$$

Exercice 2. A l'aide des formules de duplication, calculer $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Exercice 3. A l'aide des formules de l'exercice 1, déterminer $\cos(\pi/12)$.

Exercice 4. Sachant que $\pi/2 \leq x \leq \pi$ et que $\cos(x) = 1/3$, donner la valeur exacte de $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sans la calculatrice.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\cos(x) \leq \frac{1}{2} \qquad \sin(5x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan(2x) \leq 1$$

$$\cos(3x + \pi/2) = \sin(2x) \qquad \cos(x) = \sin(x) \qquad \cos^2(x) \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 6. Simplifier les expressions

$$f(t) = \cos^4(t) - \sin^4(t) \qquad f(t) = (\cos(t) + \sin(t))^2$$

Exercice 7 : La mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène

A Syène , à midi le jour du solstice d'été, les rayons du Soleil atteignent le fond d'un puits profond de la ville. Au même moment, à Alexandrie, l'ombre d'un bâton de 1m planté droit dans le sol est longue d'environ 13 cm. La distance la plus courte (à dos de chameau) pour aller de Syène à Alexandrie est d'environ 788 km. En déduire une approximation de la circonférence (et donc du diamètre) de la Terre avec les hypothèses (raisonnables) que les rayons du Soleil arrivant jusqu'à la Terre sont tous parallèles et que la Terre est parfaitement ronde.

Exercice 8. Calculer la limite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan(x)}{\pi/2 - x}$$