TD 4
Nombres complexes

27 mars 2012

Exercice 1.

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}; \qquad \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}; \qquad 4e^{2i\pi/3}; \qquad 8e^{3i\pi/4} - 5e^{i\pi/3}.$$

Exercice 2.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$$\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}; \qquad (1-i); \qquad \frac{3}{1-i}; \qquad \sqrt{3}+i; \qquad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 3.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, écrire la forme algébrique de $1/z$.

Exercice 4.

Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 + 2z + 3$ est réel.

Exercice 5.

Dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, quand est-ce que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

(a) Démontrer que pour tout nombre réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En déduire les expressions usuelles de $\cos(\theta)^2$ et $\sin(\theta)^2$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

(b) Démontrer que pour tout nombre complexe z,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}; \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Expliquer en quoi cela généralise le (a).

Exercice 7.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer le module et l'argument de $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Exercice 8.

Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1; \qquad \arg\left(\frac{z-1}{z+2}\right) = 0 \mod 2\pi.$$

Exercice 9.

Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ (forme algébrique et trigonométrique). Montrer qu'ils s'écrivent sous la forme $1, j, j^2$. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les solutions complexes de $1 + z + z^2 = 0$

Exercice 10.

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, calculer le module et l'argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$. En déduire une expression de $\cos(\theta) + \cos(\theta')$ et de $\sin(\theta) + \sin(\theta')$ en fonction de $\theta + \theta'$ et $\theta - \theta'$.

Exercice 11.

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul donné sous sa forme trigonométrique. Trouver les solutions de $x^2 = z$ dans $\mathbb{C}$ en fonction de ρ et θ.

En déduire, pour tout polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c une expression des racines dans $\mathbb{C}$ de ce polynôme.

Exercice 12.

Pour tout nombre complexe z non nul et tout entier n, exprimer la forme trigonométrique de z^n en fonction de celle de z. En déduire le nombre de solutions de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$. On les appelle racines n-ièmes de l'unité. A quoi correspondent-elles géométriquement ?