TD 2
Limites, continuité, dérivabilité

20 février 2012

Exercice 1.

Etant donné que $\lim_{x\to a} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$, dire quelles limites suivantes sont calculables et les calculer le cas échéant

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x), \qquad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x), \qquad \lim_{x\to a} f(x)-h(x), \qquad \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x)\cdot h(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad \lim_{x\to a} (f(x)-g(x))h(x)$$

Exercice 2.

Chercher un exemple de fonction qui n'admet pas de limite (ni finie ni infinie) en $a = +\infty$, puis en $a = 0$. En déduire dans chacun des cas un exemple de deux fonctions f et g telles que ni f ni g n'admettent une limite en a mais $f.g$ en admet une.

Exercice 3.

La fonction $x \mapsto |x|$ admet-elle une limite en 0 ? En est-il de même de la fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$?

Exercice 4.

Déterminer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x}\,\sin\left(\frac{4}{x}\right), \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)}.$$

Exercice 5.

Dire de chacune des expressions suivantes si c'est une forme indéterminée, et déterminer sa limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+x}{4x+6} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+x}{x^4+x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-5}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Exercice 6.

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(1/x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2\ln(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}-3}}{x^3+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) - x\ln(2+x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{x\,1/x+1}}{x+3} \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)}$$

Exercice 7.

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction donnée est discontinue ou continue en le point donné, et expliquer pourquoi.

$$f(x) = \ln|x-1|, \qquad a = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$$

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$$

Exercice 8.

Soit f une fonction continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante égale à 1 ou constante égale à -1 sur I, et trouver un contre-exemple dans le cas où on ne suppose pas que f est continue.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ?

Exercice 10.

Démontrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que chaque équations suivante admet une solution dans l'intervalle donné.

$$\begin{array}{cc} x^3 = x+1 &]-2,-1[\\ 5\ln(x) = \sqrt{x} &]1,2[\\ \cos(x) = x &]0,\pi/2[\end{array}$$

Exercice 11.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe toujours $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. En application, montrer que sur n'importe quel trajet, il existe un instant où notre vitesse est égale à la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours. Trouver un contre-exemple lorsque f n'est pas continue.

Exercice 12.

Les fonctions suivantes sont-elles continues ? dérivables en 0 ? Dessiner rapidement la fonction pour se faire une idée.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{|x|} \\ f(x) &= \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$