TD 4
Développements limités

11 octobre 2012

Exercice 1.

Soit f une fonction dérivable deux fois en x_0 et telle que f'' est continue au voisinage de x_0. Ecrire la formule de Taylor-Young pour le développement limité de f en x_0. En déduire les développements limités à l'ordre 2 de :

$$f(x) = \sin(x^2+1) \text{ en } 0, \qquad g(x) = \sqrt{x} \text{ en } 1,$$
$$h(x) = 2x^2+3 \text{ en -1}, \qquad i(x) = \exp(\sin(x)) \text{ en } 0.$$

Exercice 2.

Faire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 1, des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{1+3x-2x^2}{(x-1)^2}, \qquad k(x) = \frac{\sin(e^x-1)}{x}.$$

Exercice 3.

Faire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2, des fonctions suivantes :

$$f(x) = \tan(x), \qquad g(x) = \ln(1+x), \qquad h(x) = \ln(1+x^2), \qquad k(x) = \sqrt{1+x}.$$

Exercice 4.

Faire une représentation graphique, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \cos(x).$$

en observant son développement limité.

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}.$$

Exercice 6.

Calculer les limites suivantes, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 du numérateur (et éventuellement du dénominateur).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)-3x}{\ln(1+x)-x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1-x/2}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2}.$$

Exercice 7.

Si $f(x) = \arctan(x)$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis donner un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0, puis au voisinage de 1.