TD 3
Fonctions usuelles, dérivation, intégration

14 octobre 2013

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 2.

En utilisant la définition des fonctions trigonométriques réciproques et les valeurs spéciales des fonctions trigonométriques, calculer

$$\arcsin(0) \qquad \arcsin(-1) \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \arctan(1)$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \arctan(-\sqrt{3}) \qquad \arccos(-1)$$

Parmi ces valeurs, certaines ne sont pas définies ! Préciser lesquelles et pourquoi.

Exercice 3.

Calculer

$$\int_0^1 x^3\,dx,\qquad \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx,\qquad \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,\qquad \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx,\qquad \int_0^\pi \sin(x)\,dx.$$

Exercice 4.

Déterminer les dérivées et des primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine maximal de définition :

$$x\mapsto \cos(3x-5) \qquad x\mapsto \frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^2} \qquad x\mapsto \frac{1}{x-2}\ .$$

Exercice 5.

Montrez, en dessinant le graphe de $x\to\sqrt{9-x^3}$ sur $[0,3]$, que $\int_0^3\sqrt{9-x^2}=\frac{9\pi}{4}$.

Exercice 6.

Calculer

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx,\quad \int_0^1 xe^{2x}\,dx,\quad \int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx,\quad \int_0^1 e^x\sqrt{e^x+3}\,dx,$$

$$\int_2^3 x\sin(x^2)\,dx, \quad \int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,dx \quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\,dx$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx \quad \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \int_0^{\pi} \sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}\,dx.$$

Exercice 7.

Calculer l'intégrale suivante (soit en intégrant par parties, soit en faisant un changement de variables) :

$$\int \frac{\log(x)}{x}\,dx$$

Exercice 8.

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -1 et 5, on a : $\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}$. En déduire un calcul de

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x-5}\,dx.$$

Exercice 9.

Calculer

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,dx, \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx \quad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)^2}\,dx$$

Exercice 10.

Trouver les primitives

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, \quad \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx, \quad \int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

La dernière primitive peut se calculer de deux façons différentes. Les voyez-vous ?

Exercice 11.

Soient $\lambda, T > 0$. Calculer

$$I(T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}\,dt \quad \text{et} \quad E(T) = \int_0^T t\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

Diéterminer les limites de $I(T)$ et $E(T)$ quand T tend vers infini.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On pose

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \lim_{x\to+\infty} I_n(x)$$

Établir grâce à une intégration par parties une relation de récurrence (sur n) vérifiée par $I_n(x)$; en déduire une relation de récurrence vérifiée par J_n, et enfin calculer J_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 13.

Calculer

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\,dx,$$