Exemples de diagonalisation

25 octobre 2013

Méthode pour diagonaliser une matrice (2,2) :

Pour expliquer la méthode, on part d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille $(2,2)$.

• Étape 1 : On calcule le polynôme caractéristique $p_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.

• Étape 2 : On calcule son discriminant Δ. Alors :

– Si $\Delta < 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, terminé.

– Si $\Delta = 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, à moins d'être déja diagonale, terminé.

– Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines réelles λ et μ de p_A, qui sont alors les *valeurs propres* de A. La matrice est diagonalisable, on doit faire deux étapes de plus pour la diagonaliser.

• Étape 3 : On cherche des solutions non nulles des équations matricielles $(A - \lambda I_2)X = 0$ et $(A - \mu I_2)X = 0$, qui sont alors des *vecteurs propres* X_λ et X_μ associés respectivement aux valeurs propres λ et μ.

• Étape 4 : La matrice $P = (X_\lambda | X_\mu)$ est inversible, et A est diagonalisée sous la forme

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$$

ce qui termine la méthode.

Exemple 1. Diagonalisons $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

• Étape 1 : Son polynôme caractéristique est $p_A(X) = X^2 - 4X - 5$.

• Étape 2 : Le discriminant Δ du polynôme caractéristique est égal à 36, donc A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda = -1$ et $\mu = 5$.

• Étape 3 : On a $A - \lambda I_2 = A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le système linéaire correspondant est donc

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de A de valeur propre associée -1. De la même manière, $A - \mu I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de A de valeur propre associée 5.

• Étape 4 : La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et d'après le théorème du cours,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

ce qui est une diagonalisation de A.

Exemple 2. Diagonalisons $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

• Étape 1 : Son polynôme caractéristique est $p_A(X) = X^2 - X - 6$.

• Étape 2 : Le discriminant Δ du polynôme caractéristique est égal à 25, donc B est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda = -2$ et $\mu = 3$.

• Étape 3 : On a $B - \lambda I_2 = B + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Le système linéaire correspondant est donc

$$\begin{cases} -x - 3y &= 0 \\ 2x + 6y &= 0 \end{cases}$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de B de valeur propre associée -2. De la même manière, $B - \mu I_2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} -6x - 3y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{cases}$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de B de valeur propre associée 3.

• Étape 4 : La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, et d'après le théorème du cours,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1},$$

ce qui est une diagonalisation de B.

Exemple 3. Diagonalisons $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

• Étape 1 : Le polynôme caractéristique de C est $p_C(X) = X^2 - 2X + 7$.

• Étape 2 : Le discriminant du polynôme est $\Delta = -24$, donc la matrice C n'est pas diagonalisable.

Exemple 4. Diagonalisons $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

• Étape 1 : Son polynôme caractéristique est $p_D(X) = X^2 + 3X$.

• Étape 2 : Le discriminant Δ du polynôme caractéristique est égal à 9, donc D est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda = -3$ et $\mu = 0$.

• Étape 3 : On a $D - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Le système linéaire correspondant est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 0 \\ -2x - y & = & 0 \end{array} \right.$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de D de valeur propre associée -3. De plus, $D - \mu I_2 = D$ car $\mu = 0$, le système linéaire correspondant est donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x - 2y & = & 0 \\ 2x + 4y & = & 0 \end{array} \right.$$

dont une solution non nulle est le vecteur $X_\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est donc vecteur propre de B de valeur propre associée 0.

• Étape 4 : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et d'après le théorème du cours,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1},$$

ce qui est une diagonalisation de D.

Exemple 5. Diagonalisons $E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Étape 1 : Le polynôme caractéristique de E est $p_E(X) = X^2 - 2X + 4$.

• Étape 2 : Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 0$, et E n'est pas diagonale, donc elle n'est pas diagonalisable.