TD 9 : Formes quadratiques binaires

Exercice 1. [Mise en pratique de la réduction]

Soit $q = (a, b, c)$ de discriminant $D < 0$ et toujours positive. Cet exercice décrit comment obtenir sa forme réduite, c'est-à-dire la forme proprement équivalente à q telle que $-a < b \leq a \leq c$ avec de plus $b \geq 0$ si $a = c$.

(a) Montrer que $a > 0$ et $c > 0$.

(b) Si $c < a$, montrer qu'on peut par équivalence propre se ramener à $c \geq a$.

(c) Si $|b| > a$, montrer qu'on peut se ramener à $|b| \leq a$. Cela annule-t-il la réduction précédente ? Comment savoir qu'on s'arrête ?

(d) Supposons qu'on arrive à une forme proprement équivalente à q avec $-a \leq b \leq a \leq c$. Si $b = -a$, montrer qu'on peut se ramener à $b = a$.

(e) Si $c = a$, montrer qu'on peut se ramener à $b \geq 0$.

(f) Donner la liste des formes réduites de discriminant -15, et réduire la forme $(3, 3, 2)$.

Exercice 2. [Discriminants carrés]

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $D = k^2$.

(a) Pour $q = (a, b, c)$ de discriminant D, donner explicitement une solution non nulle de $q(x, y) = 0$.

(b) Montrer que $q \overset{+}{\sim} (0, k, c')$ pour un certain c' entre 0 et $k - 1$.

(c) Montrer que c' est entièrement déterminé par q, et en déduire qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence de formes de discriminant D.

Exercice 3. [Interprétation géométrique de la réduction de Gauss]

À toute forme $q = (a, b, c)$ de discriminant $D < 0$, on associe $t(q) = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}$.

(a) Montrer que pour toute matrice $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a $t(q \circ P) = P^{-1} \cdot t(q)$ pour l'action par homographies sur le demi-plan de Poincaré.

(b) Montrer que q est réduite sous forme de Gauss si et seulement si $t(q)$ appartient au domaine fondamental de cette action, défini comme l'ensemble des t tels que $-1/2 \leq \mathrm{Re}(t) < 1/2$ et $|t| > 1$ ou $-1/2 \leq \mathrm{Re}(t) \leq 0$ et $|t| = 1$ *(faire un dessin)*.

On rappelle que pour un corps quadratique imaginaire K, l'application qui à $I = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ associe la forme quadratique binaire $q_{u,v} : (x, y) = N(xu + yv)/N(I)$ induit une bijection entre $\mathrm{Cl}(K)$ et les formes de discriminant D_K à équivalence propre près.

(c) Pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ et $\alpha = (1 + i\sqrt{11})/2$, calculer les formes quadratiques associées aux idéaux $(3, \alpha + 1)$ et $(23, \alpha + 9)$.

(d) En déduire que ces idéaux sont dans le même classe dans $\mathrm{Cl}(K)$.

(e) Déduire de ces questions un algorithme pour calculer $\mathrm{Cl}(K)$ pour tout corps quadratique imaginaire K.

Exercice 4. [Exemples de nombres premiers représentés par une forme quadratique]

Dans cet exercice, on cherche les nombres premiers p tels que $p = q(x, y)$, avec $q(x, y) = x^2 + 5y^2$.

(a) Expliquer pourquoi ce n'est pas évident via les corps quadratiques.

(b) Montrer qu'il existe exactement deux classes d'équivalence propre de formes quadratiques positives de discriminant -20, et en donner les représentants réduits.

(c) Montrer que si le nombre premier impair p est représenté par q, alors p est congru à 1 ou 9 modulo 20.

(d) Plus généralement, montrer que si p est représenté par une forme de discriminant -20 si et seulement si D est carré modulo $4p$ (ce qui équivaut à p congru à $1, 3, 7$ ou 9 modulo 20), et que cette forme est unique à équivalence près.

(f) Trouver l'autre forme réduite de discriminant -20, qu'on note q'. Montrer que si p est représenté par q', alors p est congru à 3 ou 7 modulo 20.

(g) En déduire, suivant les congruences de p, par quelles formes de discriminant -20 il est représenté.