TD 8 : Géométrie des nombres et groupe de classes

Exercice 1. [Calcul de groupes des classes avec la borne de Minkowski]

(a) Soit K un corps de nombres. Rappeler quelle est la constante donnée par le théorème de Minkowski pour les normes de représentants du groupe de classes.

(b) Calculer cette constante pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d = -5, -3, -2, -1, 2, 3, 5$.

(c) En déduire que $\mathcal{O}_K$ est principal pour $d = -3, -2, -1, 2, 3$.

(d) Montrer que le groupe des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(e) (*Pour les courageux*) De la même manière, montrer que $\mathcal{O}_K$ est principal pour $d = -7, -11, -19, -43, -67, -163$. En fait ce sont les seuls avec ceux du (c) pour $d < 0$! (Théorème de Stark).

(f) Y a-t-il une borne inférieure naturelle sur la borne de Minkowski ? En déduire que dans tout corps de nombres sauf $\mathbb{Q}$, au moins un nombre premier est ramifié.

(g) Montrer également que la valeur absolue du discriminant tend vers $+\infty$ lorsque le degré du corps tend vers l'infini.

Exercice 2.

Soit K un corps de nombres.

(a) Soit I un idéal de $\mathcal{O}_K$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $I^m = (a)$ pour un certain $a \in \mathcal{O}_K$. Montrer que l'idéal $I \cdot \mathcal{O}_L$ est principal avec $L = K(\sqrt[m]{a})$.

(b) Montrer qu'il existe une extension finie L de K pour laquelle pour tout idéal I de $\mathcal{O}_K$, l'idéal $I \cdot \mathcal{O}_L$ de $\mathcal{O}_L$ est principal.

Exercice 3. [Un théorème de Carlitz]

Soit K un corps de nombres.

(a) Supposons que le groupe de classes de K est de cardinal 1 ou 2.

Montrer que les idéaux premiers non nuls principaux et les produits de deux idéaux premiers non principaux sont principaux et même engendrés par des irréductibles.

(b) En déduire que toute décomposition d'un $\alpha \in \mathcal{O}_K$ non nul en produit d'irréductibles a exactement le même nombre d'irréductibles.

(c) On admet désormais que toute classe d'idéaux contient un idéal premier. On suppose que le groupe de classes de K est de cardinal au moins 3.

Si celui-ci admet un élément d'ordre $r > 2$, écrire une égalité de la forme $\pi^r = \pi_1\pi_2$ avec π, π_1, π_2 irréductibles.

Sinon, écrire une égalité de la forme $\pi^2 = \pi_1\pi_2\pi_3$ avec π, π_1, π_2, π_3 irréductibles.

(d) Conclure.