TD 3 : Anneaux de Dedekind et corps cyclotomiques

Exercice 1. [Anneaux d'entiers des corps cyclotomiques]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$ et $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Le but de cet exercice est de calculer son discriminant et de montrer que son anneau d'entiers est toujours $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

(a) Supposons que $n = p^m$ avec p premier. Montrer que $N_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_{p^m} - 1) = \pm p$, et en déduire le discriminant de ζ_{p^m} au signe près. Montrer que ce discriminant a la même valuation p-adique que $\mathrm{disc}(K)$.

(b) En déduire que $\mathrm{disc}(K) = \pm p^{p^{m-1}(pm-m-1)}$ et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$.

(c) Montrer que pour m et n premiers entre eux, $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$.

(d) Avec les questions précédentes, en déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $\mathrm{disc}(K)$ a les mêmes facteurs premiers que n, et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_n]$.

Exercice 2. [Opérations de base et décomposition]

Soient I et J des idéaux non nuls de A. Donner les décompositions de IJ, $I \cap J$ et $I + J$ en fonction de celles de I et J. En déduire que $IJ = (I \cap J)(I + J)$.

Exercice 3. [Lemme d'approximation] Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K.

Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A et tout $a \in A$ non nul, on note $v_{\mathfrak{p}}(a)$ la multiplicité de $\mathfrak{p}$ dans la décomposition de (a), et $v_{\mathfrak{p}}(0) = +\infty$.

(a) Montrer que chaque $v_{\mathfrak{p}}$ est une valuation discrète sur A qui s'étend sur K, et que l'anneau de valuation discrète associé est $A_{\mathfrak{p}}$.

(b) Montrer que $A = \cap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$.

(c) Montrer le lemme d'approximation : pour $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux maximaux distincts de A, $x_1, \cdots, x_r$ des éléments de K et $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}$, il existe $x \in K$ tel que $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

(d) En déduire que tout idéal de A est soit principal, soit engendré par deux éléments.

(e) Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers, il est principal. Donner un exemple d'un tel anneau.

Exercice 4. [Caractérisation des anneaux de Dedekind]

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K.

(a) Supposons que pour tout idéal fractionnaire non nul I de A, $I \cdot I^{-1} = A$. Montrer que A est noethérien et que tout idéal non nul de A s'écrit de manière unique comme produit d'idéaux maximaux.

(b) Réciproquement, prouver que si tout idéal non nul de A s'écrit comme produit d'idéaux maximaux, tout idéal fractionnaire non nul de A est inversible.

(c) En déduire que ces deux conditions sont équivalentes à être un anneau de Dedekind.