TD 11 : Séries de Dirichlet et fonctions zeta

Exercice 1. [Propriétés élémentaires de ζ]

(a) Montrer que ζ ne s'annule jamais sur le domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Identifier les coefficients des égalités de fonctions holomorphes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1) \\ \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 2) \end{aligned}$$

où μ est la fonction de Möbius et φ l'indicatrice d'Euler.

Exercice 2. [Densité polaire]

Soit K un corps de nombres. Pour un ensemble T d'idéaux premiers non nuls de K, on note

$$\zeta_{K,T}(s) = \prod_{\mathfrak{P} \in T} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{P})^{-s}}$$

(cette expression définissant bien une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$).

S'il existe m et n tels que $\zeta_{K,T}^n$ se prolonge en une fonction holomorphe autour de 1 avec un pôle d'ordre m, on dit que T a une *densité polaire* $d(T) = m/n$.

(a) Montrer que si T est fini, il est de densité polaire 0, et que si T est l'ensemble de tous les idéaux premiers non nuls, il est de densité polaire 1.

(b) Montrer que si T et T' sont disjoints et avec densités polaires, alors $T \cup T'$ a une densité polaire $d(T + T') = d(T) + d(T')$.

(c) On suppose maintenant que T ne contient pas d'idéaux premiers tels que $N(\mathfrak{P})$ est un nombre premier. Montrer que $\zeta_{K,T}$ s'écrit comme un produit

$$\zeta_{K,T}(s) = \prod_{i=1}^{[K:\mathbb{Q}]} g_i(s)$$

où $g_i(s)$ est un produit sur les nombres premiers de $\mathbb{Z}$ de facteurs de la forme $(1 - p^{-fs})^{-1}$ avec $f \geq 2$ ou 1. En déduire que T est de densité polaire nulle.

(d) Soit S l'ensemble des nombres premiers totalement décomposés dans K et T l'ensemble des idéaux premiers de K au-dessus d'éléments de S. Si $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne, montrer que

$$\zeta_{K,T} = \zeta_{\mathbb{Q},S}^{[K:\mathbb{Q}]}.$$

(e) En utilisant les questions précédentes, montrer que T a une densité polaire de 1 donc que S a une densité polaire de $1/[K:\mathbb{Q}]$.

(f) Soit L une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ qui a exactement les mêmes nombres premiers totalement décomposés que K. Montrer via les densités polaires que $[KL : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}]$, et en déduire que $K = L$.

Exercice 3. [Propriétés de Γ]

(a) Montrer que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire que Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe dont les seuls pôles (tous simples) sont $0, -1, -2, \cdots$.

(b) Prouver que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x B(x,n)$ avec $B(x,n) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

(c) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (*forme d'Euler*).

(d) Montrer grâce à la formule précédente l'égalité de fonctions holomorphes sur le domaine $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}.$$

(c'est la *forme de Weierstrass* de Γ).

(e) En déduire que Γ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. [Prolongement analytique de ζ]

Cet exercice est consacré à la preuve du prolongement analytique de ζ et de son équation fonctionnelle. On appelle fonction thêta de Jacobi la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}.$$

(a) Montrer que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\xi(s) := \frac{\Gamma(s/2)\zeta(s)}{(2\pi)^s} = \int_0^{+\infty} \theta(t) t^{s/2-1} dt.$$

On pose alors

$$f(s) = \int_1^{+\infty} \theta(t) t^{s/2-1} dt,$$

ce qui définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$: il reste à considérer l'autre moitié de l'intégrale.

(b) On admet l'identité de Jacobi (démontrable avec la formule de Poisson) : pour tout $t > 0$,

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\cdot\theta(t) + \frac{\sqrt{t}-1}{2}.$$

Utiliser cette formule pour montrer que

$$\xi(s) = f(s) + f(1-s) + \frac{1}{s(s-1)},$$

et en déduire que ξ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les seuls pôles (simples) sont 0 et 1, et telle que

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

(c) Conclure que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un seul pôle (simple) en $s = 1$, et ses zéros contenus dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, à part ses « zéros triviaux », en $-2, -4, \cdots$