ÉNS Lyon
2016-2017

Théorie des Nombres
M1

TD 10 : Théorème des unités

Exercice 1. [Unités fondamentales (à la main)]

On suppose $d > 0$ congru à 2 ou 3 modulo 4. Soit b le plus petit entier positif tel que $db^2 + 1$ ou $db^2 - 1$ est un carré a^2 avec $a > 0$.

(a) Montrer que $a + b\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ (*indice : regarder par récurrence les signes des a_n, b_n tels que $a_n + b_n\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^n$*).

(b) En déduire les unités fondamentales pour $d = 2, 3, 6, 7, 10, 11$.

(c) Pour $d > 0$ congru à 1 modulo 4, soit b le plus petit entier tel que $db^2 + 4$ ou $db^2 - 4$ est un carré a^2. Montrer que $(a + b\sqrt{d})/2$ est l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ par un argument similaire.

(d) En déduire les unités fondamentales pour $d = 5, 13, 17, 21$.

(e) Quel est l'inconvénient majeur de cette méthode ?

Exercice 2. [Notion de régulateur]

(a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, tous les autres strictement négatifs, et chaque ligne est de somme nulle. Montrer que chaque sous-partie de $n - 1$ de ses colonnes est libre (*considérer une solution X de $MX = 0$, et son coefficient le plus grand*).

(b) Soit $M \in M_{n-1,n}(\mathbb{R})$ une matrice dont chaque ligne est à somme nulle. Montrer que la valeur absolue de tout mineur de taille $n - 1$ de M est indépendante du choix du mineur.

Conséquence importante : pour un corps de nombres K et $u_1, \cdots, u_{r_1+r_2-1}$ des unités telles que les $\mathrm{Log}(u_i)$ engendrent $\mathrm{Log}(\mathcal{O}_K^*)$, on appelle *régulateur* de K, noté R_K, la valeur absolue de n'importe quel mineur de taille $r_1 + r_2 - 1$ de la matrice des $\mathrm{Log}(u_i)$.

(c) Calculer le régulateur de K lorsque K est : un corps quadratique imaginaire, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Exercice 3. [Unités d'un corps cyclotomique]

On se place dans $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ avec $n \geq 3$ et $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. On pose

$$I = \{1 < k < n/2, \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\}.$$

(a) À quelles conditions sur $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la fraction

$$\xi_k = \frac{1 - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n}$$

est-elle une unité de $\mathcal{O}_K$?

(*b*) Montrer que pour tout $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$,

$$\zeta_n^{(1-k)/2}\xi_k = \pm \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.$$

En déduire une relation (à racine de l'unité près) entre ξ_k et ξ_{-k}, et le rang maximal du groupe engendré par les ξ_k. Le comparer au rang de $\mathcal{O}_K^*$ prévu par le théorème de Dirichlet.

(*c*) Notons K^+ le corps cyclotomique réel, engendré par $\zeta_n + \overline{\zeta_n}$. Calculer son degré, décrire ses plongements $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ et calculer le rang de son groupe des unités.

(*d*) Montrer que toute unité ξ_k est à racine n-ième près une unité de $\mathcal{O}_{K^+}$.

(*En fait, on peut montrer que les ξ_k engendrent un sous-groupe d'indice fini du groupe des unités, et que cet indice est lié à un nombre de classes*).