TD 7 : Géométrie des nombres

Exercice 1. [Sous-groupes et réseaux de $\mathbb{R}^n$]

(a) Soit Λ un sous-groupe discret (au sens topologique) de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 tel que $\Lambda \cap U = \{0\}$.

(b) En déduire que 0 n'est pas point d'accumulation de Λ, puis que Λ est fermé, et complet pour la métrique usuelle.

Soit $V = \mathrm{Vect}(\Lambda)$, $(v_1, \cdots, v_k)$ une base de V constituée d'éléments de Λ et Λ' le $\mathbb{Z}$-module qu'elle engendre. On considère alors

$$D = \{x_1v_1 + \cdots + x_kv_k \,|\, 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

(c) Montrer que $\Lambda \cap D$ est fini, et en déduire que Λ/Λ' est fini, puis que Λ est un groupe abélien libre de type fini engendré par une famille $\mathbb{R}$-libre de $\mathbb{R}^n$.

(d) Réciproquement, montrer que si Λ est un $\mathbb{Z}$-module engendré par une famille $\mathbb{R}$-libre de $\mathbb{R}^n$, alors Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.

(e)(*Résultat général, plus difficile*) Montrer que si un sous-groupe fermé G de $\mathbb{R}^n$ ne contient aucune droite, il est discret. En déduire que les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-groupes de la forme $\Lambda \oplus V$ avec Λ' un sous-groupe discret et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. [Applications de la borne de Minkowski]

(a) Donner la borne de Minkowski pour tous les corps quadratiques.

(b) Montrer que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est principal pour $d = -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 13$.

(c) Montrer que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est principal pour $d = -11, -19, -43, -67, -163$.

Exercice 3. [Théorèmes de Minkowski]

(a) Donner un contre-exemple au théorème lorsque le volume du convexe est exactement 2^n fois le volume du réseau.

(b) Soient $L_1, \cdots, L_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$L_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

et $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Pour des réels positifs $c_1, \cdots, c_n$ tel que $c_1 \cdots c_n > |\det(M)|$, montrer qu'il existe un élément m de $\mathbb{Z}^n$ tel que

$$|L_i(m)| < c_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Exercice 4. [Formule de Pick]

La formule de Pick est la suivante : étant donné un polygone convexe P de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont à coordonnées entières, on a

$$\mathrm{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

où I est le nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ dans l'intérieur de P, et B le nombre de points sur le bord de P (incluant les sommets). Le but de l'exercice est de prouver ette formule.

On appelle triangle élémentaire un triangle de $\mathbb{R}^2$ un triangle de $\mathbb{R}^2$ à sommets dans $\mathbb{Z}^2$ n'ayant aucun autre point de $\mathbb{Z}^2$ ni sur ses arêtes ni dans son intérieur.

(a) Montrer qu'un triangle élémentaire a une aire au moins égale à $1/2$.

(b) Montrer que l'image d'un triangle élémentaire par une translation par $\mathbb{Z}^2$, ou une rotation d'angle π est encore un triangle élémentaire.

(c) Etant donné un triangle élémentaire T dont l'un des sommets est 0, fabriquer un convexe ne contenant pas de points entiers à part 0 et sur son bord d'aire exactement 8 fois celle de T.

(d) En déduire que l'aire d'un triangle élémentaire est exactement $1/2$ avec le théorème de Minkowski.

(e) Étant donné un polygone P de $\mathbb{R}^2$ à sommets entiers, montrer qu'il peut s'écrire comme union de triangles deux à deux soit disjoints soit avec exactement une arête commune (et à sommets entiers).

(f) Montrer qu'on peut même imposer que ces triangles soient élémentaires, et en déduire la formule de Pick générale.