TD 6 : Formes quadratiques binaires, suite

Exercice 1. [Formes ambigües]

Pour $q = (a, b, c)$, on note $q^{opp} = (a, -b, c)$, dite la forme opposée. Elle est dite ambigüe si $q^{opp} \overset{+}{\sim} q$.

(a) Montrer que $q_1 \overset{+}{\sim} q_2$ si et seulement si $q_1^{opp} \overset{+}{\sim} q_2^{opp}$. L'opposé d'une classe d'équivalence propre C en est donc une également, on la note C^{opp}.

(b) Supposons que $D < 0$, montrer qu'une forme réduite (a, b, c) de discriminant D est ambigüe si et seulement si $b = 0$, $b = a$ ou $c = a$. On supposera toujours $D < 0$ dans la suite, et on ne considèrera que les formes positives.

(c) Pour τ la fonction « nombre de diviseurs positifs », montrer que le nombre de formes réduites ambigües de discriminant D avec $b = 0$ est $\tau(-D/4)$.

(d) Montrer que les formes réduites (a, b, c) telles que $b = a$ ou $c = a$ sont en bijection avec les formes (a, a, c) telles que $1 \leq a \leq 2c$.

(e) Soit $t(D)$ le nombre de diviseurs premiers de D. Montrer que le nombre $A(D)$ de formes primitives (a, a, c) telles que $1 \leq a \leq 2c$ est égal à $2^{t(D)}$ si $D \equiv 1 \mod 4$.

(f) En déduire le nombre de classes ambigües de $\mathrm{Cl}(D)$ pour $D = -19, -23, -27$.

Exercice 2. [Cas réel de la réduction des formes quadratiques]

On fixe ici un discriminant $D > 0$ non carré, et on cherche à déterminer les classes d'équivalence des formes quadratiques de discriminant D.

On dit que (a, b, c) de discriminant D est réduite si

$$\left|\sqrt{D} - 2|a|\right| < b < \sqrt{D}$$

(a) Montrer que si (a, b, c) est réduite, alors a et c sont de signe opposé et $|a|, b$ et $|c|$ sont plus petits que $\sqrt{D}$.

(b) Montrer que (a, b, c) est réduite si et seulement si (c, b, a) l'est.

Pour a, b des entiers, on définit $r = r_D(a, b)$ comme l'unique entier tel que $r \equiv b \mod 2a$ et $-|a| < r \leq |a|$ si $|a| > \sqrt{D}$, $\sqrt{D} - 2|a| < r < \sqrt{D}$ sinon.

On définit alors l'opérateur ρ de réduction sur les formes quadratiques réduites de discriminant $D > 0$ par

$$\rho(a, b, c) = \left(c, r(c, -b), \frac{r(c, -b)^2 - D}{4c}\right).$$

(c) Montrer qu'en partant de (a, b, c), la suite $\rho^n(a, b, c)$ est prépériodique et que les éléments de la période sont toutes les formes réduites proprement équivalentes à (a, b, c).

(d) En déduire un algorithme pour calculer le nombre de classes de D.

Exercice 3. [Cas réel du lien entre les groupes de classes]

On fixe ici K le corps quadratique réel de discriminant D, et on note $\mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K)$ le groupe des classes d'équivalence stricte d'idéaux de $\mathcal{O}_K$ (rappelons que I et J sont strictement équivalents si $I = \alpha J$ pour un $\alpha \in K^*$ tel que $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) > 0$).

(a) Reconstruire l'application $\mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Cl}(D)$ comme dans le cours. Où la notion d'équivalence stricte intervient-elle ?

(b) Pour l'application $\mathrm{Cl}(D) \to \mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K)$, comment gérer le cas où $\alpha < 0$?