# TD 4 : Décomposition en idéaux et groupe de classes

**Exercice 1.** [Normes d'idéaux et d'élements]

($a$) Pour $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ un morphisme de groupes injectif, montrer que le cardinal de $\mathbb{Z}^n/f(\mathbb{Z}^n)$ est égal à $|\det(f)|$.

($b$) Pour un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $p$ premier, écrire $N(\mathfrak{P})$ en fonction de l'inertie de $\mathfrak{P}$ sur $p$.

**Exercice 2.** [Cas cyclotomique]

Soit $n \geq 3$, $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$ et $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On admet que le polynôme minimal de $\zeta_n$ est le polynôme cyclotomique $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

($a$) Pour $p$ un nombre premier ne divisant pas $n$, décrire les diviseurs irréductibles de $\Phi_n$ modulo $p$.

($b$) En déduire le nombre d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $p\mathcal{O}_K$ en fonction de $p$ modulo $n$.

**Exercice 3.** [Calcul de groupe de classes, cas quadratique]

Soit $d$ un entier différent de 0 et 1 sans facteur carré, et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

($a$) Pour le choix de $\mathbb{Z}$-base naturelle de $\mathcal{O}_K$, calculer la constante $G$ du cours intervenant dans la preuve de la finitude du groupe des classes.

($b$) En réutilisant les résultats du TD précédent, en déduire que $\mathcal{O}_K$ est principal si $d = -3, -2, -1, 2, 3, 5$.

($c$) Montrer que le groupe de classes de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Exercice 4.**

Soit $K$ un corps de nombres.

($a$) Montrer que pour tout idéal $I$ de $\mathcal{O}_K$, il existe une extension finie $L$ de $K$ telle que $I \cdot \mathcal{O}_L$ est principal.

($b$) Montrer qu'il existe une extension finie $L$ de $K$ pour laquelle pour tout idéal $I$ de $\mathcal{O}_K$, $I \cdot \mathcal{O}_L$ est principal.

**Exercice 5.** [Un théorème de Carlitz]

Soit $K$ un corps de nombres.

($a$) Supposons que le groupe de classes de $K$ est de cardinal au plus 2.

Montrer que les idéaux premiers non nuls principaux, et les produits de deux idéaux premiers non principaux sont engendrés par des irréductibles.

($b$) En déduire que toute décomposition d'un $\alpha \in \mathcal{O}_K$ non nul en produit d'irréductibles a exactement le même nombre d'irréductibles.

($c$) On admet désormais que toute classe d'idéaux contient un idéal premier. On suppose que le groupe de classes de $K$ est de cardinal au moins 3.

Si celui-ci admet un élément d'ordre $r > 2$, écrire une égalité de la forme $\pi^r = \pi_1\pi_2$ avec $\pi, \pi_1, \pi_2$ irréductibles.

Sinon, écrire une égalité de la forme $\pi^2 = \pi_1\pi_2\pi_3$ avec $\pi, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ irréductibles.

$(d)$ Conclure.