TD 11 : Fonctions L de Dirichlet

Exercice 1. [Questions sur les fonctions L]

Dans cet exercice, χ est un caractère de Dirichlet non trivial, de conducteur D.

(a) Est-ce que le produit eulérien de $L(s,\chi)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 0$?

(b) Quel est le domaine de convergence exact de la série définissant $L(s,\chi)$?

(c) Donner le développement en série entière de arctan au voisinage de 0. En déduire l'égalité

$$L(1,\chi_4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Exprimer les deux valeurs $L(1,\chi_8^{\pm})$ comme des séries.

Exercice 2. [Cas général du calcul de $L(1,\chi)$]

On fixe χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f > 1$.

(a) Montrer que

$$G(1,\overline{\chi})L(1,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{G(n,\overline{\chi})}{n} = -\sum_{a \mod f} \overline{\chi(a)} \log(1-\zeta_f^a),$$

et en déduire que

$$L(1,\chi) = -\frac{\chi(-1)G(1,\chi)}{f} \sum_{a \mod f} \overline{\chi(a)} \log(1-\zeta_f^a).$$

(b) Donner la formule de $L(1,\chi)$ comme dans le cours, suivant le signe de $\chi(-1)$.

(c) En déduire des valeurs de séries non absolument convergentes, par exemple pour $f = 5, 8, 13$.

Exercice 3. [Calcul de nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}), d < 0$]

Soit $d < 0$ sans facteur carré et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, de caractère de Dirichlet χ dont le conducteur est noté f et supposé au moins égal à 3.

Nous allons prouver une simplification de la formule du cours. On note

$$a_\chi = \sum_{k=1}^{f} \chi(k)k, \quad b_\chi = \sum_{1\le k<f/2} \chi(k)k, \quad c_\chi = \sum_{1\le k<f/2} \chi(k).$$

(a) Montrer par réindexation que $a_\chi = 2b_\chi - fc_\chi$.

(b) Si f est impair, montrer que $a_\chi = 4\chi(2)b_\chi - f\chi(2)c_\chi$ par séparation entre indices pairs et impairs.

(c) En déduire que si d est congru à 1 modulo 4,

$$h_K = \frac{1}{2-\chi(2)}|c_\chi|.$$

(d) Supposons maintenant que f est pair. Montrer que f est en fait divisible par 4, et que $\chi(f/2+1) = -1$.

(e) Montrer que $\chi(f/2+k) = -\chi(k)$ pour tout k et que $a_\chi = -f/2c_\chi$.

(f) En déduire que si d n'est pas congru à 1 modulo 4,

$$h_K = \frac{|c_\chi|}{2}.$$

Comparer cette formule avec le cas précédent.

(g) Calculer h_K pour $d = -10, -11, -13, -14, -15$.

(h) Donner une majoration du nombre de classes via les formules démontrées.