ÉNS Lyon Théorie des Nombres
2015-2016 M1

TD 10 : Fonctions zeta de Riemann et de Dedekind

Exercice 1. [Cas particulier de la réciprocité quadratique]

Soit p un nombre premier impair, on va montrer ici avec les lois de réciprocité que $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

(a) En posant $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, montrer que $p^* \equiv 1 \mod 4$ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$ est l'unique sous-corps quadratique de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

(b) Montrer que 2 est décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$ si et seulement si $p^* \equiv 1 \mod 8$.

(c) En déduire la formule grâce aux lois de réciprocité.

Exercice 2. [Propriétés élémentaires de ζ]

(a) Montrer que ζ ne s'annule jamais sur le domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Identifier les coefficients des égalités de fonctions holomorphes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)\\
\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 2)\\
\zeta(s)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)\\
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1).
\end{aligned}$$

La fonction μ est appelée fonction de Möbius, et Λ la fonction de Von Mangoldt.

Exercice 3. [Calcul de résidus de certaines fonctions ζ_K]

On pose d un entier relatif sans facteur carré différent de 0 et 1, et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Donner le discriminant et le nombre de racines de l'unité de K en fonction de d.

(b) Donner le nombre de classes de K pour $-7 \leq d \leq 7$.

(c) Pour $2 \leq d \leq 7$, donner une unité fondamentale de $\mathcal{O}_K^*$.

(d) En déduire le résidu de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$ pour d entre -7 et 7.

(e) Dans le cas quadratique imaginaire, déduire de la théorie une approche (grossière) pour calculer le nombre de classes.

Exercice 4. [Propriétés de Γ]

(a) Montrer que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire que Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe dont les seuls pôles (tous simples) sont $0, -1, -2, \cdots$.

(b) Prouver que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x B(x,n)$ avec $B(x,n) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

(c) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (*forme d'Euler*).

(d) Montrer grâce à la formule précédente l'égalité de fonctions holomorphes sur le domaine $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}.$$

(c'est la *forme de Weierstrass* de Γ).

(e) En déduire que Γ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5.

Cet exercice est consacré à la preuve du prolongement analytique de ζ et de son équation fonctionnelle. On appelle fonction thêta de Jacobi la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}.$$

(a) Montrer que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\xi(s) := \frac{\Gamma(s/2)\zeta(s)}{(2\pi)^s} = \int_0^{+\infty} \theta(t) t^{s/2-1} dt.$$

On pose alors

$$f(s) = \int_1^{+\infty} \theta(t) t^{s/2-1} dt,$$

ce qui définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$: il reste à considérer l'autre moitié de l'intégrale.

(b) On admet l'identité de Jacobi (démontrable avec la formule de Poisson) : pour tout $t > 0$,

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\cdot\theta(t) + \frac{\sqrt{t}-1}{2}.$$

Utiliser cette formule pour montrer que

$$\xi(s) = f(s) + f(1-s) + \frac{1}{s(s-1)},$$

et en déduire que ξ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les seuls pôles (simples) sont 0 et 1, et telle que

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

(c) Conclure que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un seul pôle (simple) en $s = 1$, et ses zéros contenus dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, à part ses « zéros triviaux », en $-2, -4, \cdots$