TD 9 : Fonctions L de Dirichlet

Exercice 1. [Formule analytique du nombre de classes]

Soit $d \neq 0, 1$ un entier sans facteur carré, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et χ_d le caractère quadratique associé.

(a) Si $d < 0$, rappeler la formule de h_K en fonction de χ_d.

Nous allons maintenant prouver une simplification de la formule du cours pour $d < 0$. Soit $f \geq 3$ entier et χ un caractère quadratique impair de conducteur f. On note

$$a_\chi = \sum_{k=1}^{f} \chi(k)k, \quad b_\chi = \sum_{1 \leq k < f/2} \chi(k)k, \quad c_\chi = \sum_{1 \leq k < f/2} \chi(k).$$

(b) Montrer que $a_\chi = 2b_\chi - fc_\chi$.

(c) Si f est impair, montrer que $a_\chi = 4\chi(2)b_\chi - f\chi(2)c_\chi$.

(d) En déduire que si f est impair, $a_\chi = f/(\chi(2) - 2)c_\chi$.

(e) Supposons maintenant que f est pair. Montrer que f est en fait divisible par 4, et que $\chi(f/2 + 1) = -1$.

(f) En déduire que $\chi(f/2 + k) = -\chi(k)$ pour tout k.

(g) Si f est pair, montrer qu'on a alors $a_\chi = -f/2c_\chi$, et comparer cette formule avec le (d).

(h) En déduire une formule simplifiée du nombre de classes pour $d < -3$. Comment l'exprimer lorsque $-d$ est un nombre premier ?

(i) Calculer h_K pour $d = -10, -11, -13, -14, -15$.

Exercice 2. [Théorème de Dirichlet]

Soit $f \geq 3$ un entier et χ un caractère de Dirichlet modulo f (noté χ_0 si c'est le caractère trivial)

(a) Rappeler pourquoi la série $L(s, \chi)$ converge pour $\mathrm{Re}\, s > 0$ pour $\chi \neq \chi_0$, et pourquoi $L(s, \chi_0)$ se prolonge à $\mathrm{Re}\, s > 0$ en une fonction méromorphe avec un seul pôle simple (en $s = 1$).

(b) Définissons la série

$$G(s, \chi) := \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)}{k} p^{-ks}.$$

où p parcourt les nombres premiers. Montrer qu'elle converge sur $\mathrm{Re}\, s > 1$ et que $e^{G(s,\chi)} = L(s, \chi)$ sur ce demi-plan.

(c) Montrer que

$$G(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + R_\chi(s)$$

avec R_χ une fonction holomorphe restant bornée lorsque s tend vers 1.

(d) Considérons $F(s) = \prod_\chi L(s,\chi)$ avec χ parcourant les caractères de Dirichlet modulo f. Montrer que pour $s > 1$, $F(s)$ est réel et $F(s) \geq 1$.

(e) En déduire que pour tout caractère de Dirichlet complexe χ, $L(1,\chi) \neq 0$.

Le cas où χ est réel est plus difficile, c'est l'objet des questions suivantes (avec $\chi \neq \chi_0$).

(f) Supposons que $L(1,\chi) = 0$, soit alors

$$\psi(s) = \frac{L(s,\chi)L(s,\chi_0)}{L(2s,\chi_0)}.$$

Montrer que cette fonction holomorphe définie sur $\operatorname{Re} s > 1$ se prolonge en fait à $\operatorname{Re} s > 0$ et que $\psi(s) \to 0$ quand $s \to 1/2$.

(g) Prouver que pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a

$$\psi(s) = \prod_{\substack{p \\ \chi(p)=1}} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où tous les coefficients a_n sont des réels positifs.

(h) Justifier pourquoi le développement en série de Taylor

$$\psi(s) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\psi^{(m)}(2)}{m!}(s-2)^m$$

a un rayon de convergence au moins égal à $3/2$.

(i) Montrer que pour tout $m \geq 0$,

$$\psi^{(m)}(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n)^m a_n n^{-2} = (-1)^m c_m$$

avec $c_m \geq 0$ pour tout m.

(j) En déduire que $\psi(s) \geq 1$ pour tout réel $s \in]1/2, 2]$, et trouver une contradiction.

(k) Montrer que pour tout χ non trivial, $G(s,\chi)$ reste borné lorsque $s \to 1^+$ avec s réel.

(ℓ) Prouver que pour $\operatorname{Re} s > 1$ et a premier à f,

$$\sum_\chi \overline{\chi(a)} G(s,\chi) = \phi(f) \sum_{p=a \bmod f} p^{-s} + R_{a,\chi}(s)$$

avec $R_{a,\chi}$ borné au voisinage de 1.

(m) En déduire le théorème de Dirichlet à l'aide des questions précédentes.