TD 8 : Fonctions zêta et séries de Dirichlet

Exercice 1. [Caractère de Dirichlet d'un corps quadratique]

(a) Décrire explicitement les caractères quadratiques χ_4 (de conducteur 4), χ_8^+ et χ_8^- (de conducteur 8).

(b) Pour $d \equiv 2, 3 \mod 4$ sans facteur carré, construire explicitement un caractère quadratique χ_d de conducteur $4|d|$ et tel que $\chi(-1)$ est égal au signe de d.

(c) Donner les valeurs de $\chi_d(p)$ pour tout nombre premier p en fonction de la décomposition de p dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Exercice 2. [Calcul de résidus de certaines fonctions ζ_K]

On pose d un entier relatif sans facteur carré différent de 0 et 1, et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Cet exercice utilise les résultats des TDs précédents.

(a) Donner le discriminant et le nombre de racines de l'unité de K en fonction de d.

(b) Donner le nombre de classe de K pour $-7 \leq d \leq 7$.

(c) Pour $2 \leq d \leq 7$, donner une unité fondamentale de $\mathcal{O}_K^*$.

(d) En déduire le résidu de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$ pour d entre -7 et 7.

Exercice 3. [Propriétés élémentaires de ζ]

(a) Montrer que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}}} \zeta(x) = +\infty$.

(b) Montrer la décomposition en produit eulérien de ζ.

(c) Identifier les coefficients des égalités de fonctions holomorphes

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_k(n)}{n^s}, \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > 1$.

(d) Prouver que pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > 1$, on a

$$\zeta(s) = 1/(s-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx.$$

En déduire que ζ se prolonge à l'ouvert $\operatorname{Re} s > 0$ en une fonction méromorphe avec un pôle simple en 1.

Exercice 4. [Propriétés de Γ]

(a) Montrer que pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire que Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe dont les seuls pôles sont $0, -1, -2, \cdots$.

(b) Prouver que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x B(x,n)$ avec $B(x,n) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$.

(c) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (forme d'Euler).

(d) Montrer grâce à la formule précédente l'égalité de fonctions holomorphes sur $\mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{s/n}}{1+s/n}.$$

(c'est la forme de Weierstrass de Γ).

(e) En déduire que Γ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$.