TD 5 : Unités d'un anneau d'entiers

Exercice 1. [Unités d'un anneau d'entiers quadratique]

Soit d un entier sans facteur carré différent de 0 et 1, on note $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathcal{O}_d$ son anneau des entiers.

(a) Rappeler pourquoi $\mathcal{O}_d^*$ est fini si $d < 0$, et détailler son cardinal.

(b) Pour $d > 0$ congru à 2 ou 3 modulo 4, soit b le plus petit entier positif tel que $db^2 + 1$ ou $db^2 - 1$ est un carré a^2 avec $a > 0$. Montrer qu'alors $a + b\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_d^*$ (indice : regarder par récurrence les signes de $a' + b'\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ suivant les signes de a et b).

(c) En déduire les unités fondamentales pour $d = 2, 3, 6, 7, 10, 11$.

(d) Pour $d > 0$ congru à 1 modulo 4, soit b le plus petit entier tel que $db^2 + 4$ ou $db^2 - 4$ est un carré a^2. Montrer que $1/2(a + b\sqrt{d})$ est l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_d^*$ par un argument similaire.

(e) En déduire les unités fondamentales pour $d = 5, 13, 17, 21$.

Exercice 2. [Autour du théorème des unités de Dirichlet]

(a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, tous les autres strictement négatifs, et les lignes de somme nulle. Montrer que chaque sous-partie de $n-1$ de ses colonnes est libre.

(b) Soit $M \in M_{n-1,n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les lignes sont à somme nulle. Montrer que la valeur absolue de tout mineur de taille $n-1$ de M est indépendante du choix du mineur.

(c) Décrire tous les anneaux d'entiers de corps de nombres dont le groupe des unités est de rang 1, puis 2.

Exercice 3. [Le cas cyclotomique]

Soit p un nombre premier impair, $\zeta_p = e^{2i\pi/p}$ et $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. On rappelle que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_p]$.

(a) Pour $u \in \mathcal{O}_K^*$, montrer que $u/\overline{u}$ est une racine de l'unité.

(b) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{O}_K$, u^p est congru à un certain entier a modulo $p\mathcal{O}_K$.

(c) En déduire que $u/\overline{u}$ est une racine p-ième de l'unité.

(d) En déduire que u est le produit d'une racine p-ième de l'unité et d'une unité réelle de $\mathcal{O}_K$, puis que $\mathcal{O}_K^*$ est le produit direct du groupe des racines p-ième de l'unité et de celui des unités de $\mathcal{O}_{K\cap\mathbb{R}}$.

(e) Montrer que $1 + \cdots + \zeta_p^{k-1}$ est une unité de $\mathcal{O}_K$ pour tout k premier à p. On se place maintenant dans le cas $p = 5$.

(f) Montrer que $u = -\zeta_5^2(1 + \zeta_5)$ est une unité réelle de $\mathcal{O}_K$ entre 1 et 2.

(g) Montrer que $K \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, et en déduire que $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(h) Montrer que $e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5} = u$, en déduire que $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.