TD 4 : Décomposition en idéaux et groupe de classes

Ce TD utilise de nombreux résultats de TDs précédents, bien penser à s'en servir !

Exercice 1. [Calcul de groupe de classes, cas quadratique]

Dans cet exercice, d est un entier différent de 0 et 1 sans facteur carré, et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Exprimer la borne de Minkowski pour des représentants d'idéaux du groupe de classes de K en fonction de d, en distinguant les différents cas.

(b) En déduire directement que $\mathcal{O}_K$ est principal pour $d = -3, -2, -1, 2, 3, 5, 7$.

(c) En utilisant la décomposition en idéaux premiers de $p\mathcal{O}_K$, déduire de (a) que $\mathcal{O}_K$ est principal pour $d = -2, -11, -19, -43$.

(d) Montrer que le groupe de classes de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(e) *(Plus difficile)* Après avoir prouvé que $(2, \sqrt{6})$ est un idéal principal de $\mathcal{O}_K$ pour $d = 6$, montrer que cet anneau est principal.

Exercice 2. [Un anneau principal cubique]

Soit α une racine du polynôme $X^3 - X - 7$ dans $\mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est de degré 3, avec un seul plongement réel.

(b) Calculer le discriminant de $K/\mathbb{Q}$ et montrer que $\mathcal{O}_K$ a pour base $(1, \alpha, \alpha^2)$.

(c) Calculer la borne de Minkowski de ce corps.

(d) Chercher les idéaux de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $2, 3, 5$.

(e) Montrer qu'il y a trois idéaux de norme 7, tous principaux.

(f) Conclure que $\mathcal{O}_K$ est principal.

Exercice 3.

Soit K un corps de nombres.

(a) Montrer que pour tout idéal I de $\mathcal{O}_K$, il existe une extension finie L de K telle que $I\mathcal{O}_L$ est principal.

(b) Montrer qu'il existe une extension finie L de K pour laquelle pour tout idéal I de $\mathcal{O}_K$, $I\mathcal{O}_L$ est principal.

Exercice 4. [Un théorème de Carlitz]

Soit K un corps de nombres.

(a) Supposons que le groupe de classes de K est de cardinal au plus 2.

Montrer que les idéaux premiers non nuls principaux, et les produits de deux idéaux premiers non principaux sont engendrés par des irréductibles.

(b) En déduire que toute décomposition d'un $\alpha \in \mathcal{O}_K$ non nul en produit d'irréductibles a exactement le même nombre d'irréductibles.

(c) On admet désormais que toute classe d'idéaux contient un idéal premier. On suppose que le groupe de classes de K est de cardinal au moins 3.

Si celui-ci admet un élément d'ordre $r > 2$, écrire une égalité de la forme $\pi^r = \pi_1\pi_2$ avec π, π_1, π_2 irréductibles.

Sinon, écrire une égalité de la forme $\pi^2 = \pi_1\pi_2\pi_3$ avec π, π_1, π_2, π_3 irréductibles.

(d) Conclure.