TD 3 : Décomposition en produit d'idéaux premiers

Exercice 1. [Cas quadratique]

Soit d un entier sans facteur carré différent de 1 et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Exprimer quels nombres premiers s'écrivent sous la forme $a^2 + 2b^2$ avec a, b entiers.

(b) Pour $d \equiv 1 \mod 4$ et p premier, écrire la décomposition en idéaux premiers de $p\mathcal{O}_K$ en fonction de d modulo p.

(c) Pour $d = -3$, en déduire quels nombres premiers s'écrivent sous la forme $p = a^2 + ab + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Cas cyclotomique]

Soit $n \geq 3$, $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$ et $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. On admet que le polynôme minimal de ζ_n est le polynôme cyclotomique $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et que l'anneau des entiers de est $\mathbb{Z}(\zeta_n]$.

(a) Pour p un nombre premier à n, décrire les diviseurs irréductibles de Φ_n modulo p.

(b) En déduire le nombre d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $p\mathcal{O}_K$ en fonction de p modulo n.

Exercice 3. [Opérations de base et décomposition]

Soient I et J des idéaux non nuls de A, donner les décompositions de IJ, $I \cap J$ et $I + J$ en fonction de celles de I et J. En déduire que $IJ = (I \cap J)(I + J)$.

Exercice 4. [Caractérisation des anneaux de Dedekind]

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K.

(a) Supposons que pour tout idéal fractionnaire non nul I de A, $II^{-1} = A$. Montrer que A est noethérien et que tout idéal non nul de A s'écrit de manière unique comme produit d'idéaux maximaux.

(b) Réciproquement, prouver que si tout idéal non nul de A s'écrit comme produit d'idéaux maximaux, tout idéal fractionnaire non nul de A est inversible.

(c) En déduire que ces deux conditions sont équivalentes à être un anneau de Dedekind.

Exercice 5. [Valuations discrètes sur un anneau de Dedekind]

Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K.

Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A et tout $a \in A$ non nul, on note $v_\mathfrak{p}(a)$ la multiplicité de $\mathfrak{p}$ dans la décomposition de (a), et $v_\mathfrak{p}(0) = +\infty$.

(a) Montrer que chaque $v_\mathfrak{p}$ est une valuation discrète sur A qui s'étend sur K, et que l'anneau de valuation discrète associé est $A_\mathfrak{p}$.

(b) Montrer que $A = \cap_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$.

(c) Montrer le lemme d'approximation : pour $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux maximaux distincts de A, $x_1, \cdots, x_r$ des éléments de K et $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}$, il existe $x \in K$ tel que $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geq n_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

(d) En déduire que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers, il est principal.