TD 11 : Formes quadratiques binaires et corps quadratiques

Exercice 1. [Différence entre genre et équivalence]

Rappeler quel est l'ensemble des formes réduites de discriminant -23. En déduire deux formes quadratiques de ce discriminant de même genre mais non équivalentes.

Exercice 2. [Cas $p = 2$ de la représentation modulo p^k]

Soit D un discriminant et q une forme quadratique primitive de discriminant D.

(a) Montrer que si $D \equiv 1 \bmod 4$, q représente tous les entiers de $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ pour tout k.

(b) Supposons maintenant que $D \equiv 0 \bmod 4$, on note $d = D/4$. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $q(x, y) \mod 2^k$ est déterminé par les valeurs de x et y modulo 2^{k-1}. Avec une méthode similaire au (a), montrer qu'il suffit de connaitre les entiers représentés modulo 8.

(c) Pour deux valeurs m et m' entières de q, écrire mm' sous la forme

$$mm' = X^2 - dY^2$$

avec X, Y entiers.

(d) Montrer que le produit de deux valeurs de q est toujours un carré modulo d.

(e) Si d est multiple de 8, en déduire que les valeurs atteintes par q dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ se limitent à un seul élément, et donner l'analogue si d est seulement multiple de 4.

(f) Dans les deux cas précédents, conclure sur la proportion d'éléments de $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ représentés par q.

(g) Si $d \equiv 1 \bmod 4$, montrer que q représente tout $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$. Que dire si $d \equiv 3 \bmod 4$?

(h) *(Encore plus fastidieux)* Faire les cas où d est seulement multiple de 2 suivant sa congruence modulo 8.

Exercice 3. [Cas réel du lien entre les groupes de classes]

On fixe ici K le corps quadratique réel de discriminant D, et on note $\mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K)$ le groupe des classes d'équivalence stricte d'idéaux de $\mathcal{O}_K$ (rappelons que I et J sont strictement équivalents si $I = \alpha J$ pour un $\alpha \in K^*$ tel que $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) > 0$).

(a) Reconstruire l'application $\mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Cl}(D)$ comme dans le cours. Où la notion d'équivalence stricte intervient-elle ?

(b) Pour l'application $\mathrm{Cl}(D) \to \mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_K)$, comment gérer le cas où $a < 0$?