ÉNS Lyon
2014-2015

Théorie des Nombres
M1

TD 1 : Nombres et entiers algébriques

Exercice 1. [Entiers algébriques]

Un nombre algébrique est dit entier algébrique si son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est à coefficients entiers.

(a) Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique si et seulement s'il existe P unitaire à coefficients entiers annulant α.

Pour K un corps de nombres, on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques de K (le cours suivant prouvera que c'est bien un anneau).

(b) Prouver que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Plongements de corps de nombres]

Soit L/K une extension finie de corps de nombres de degré n.

(a) Montrer que pour tout plongement $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe exactement n plongements distincts $\sigma_1, \cdots, \sigma_n : L \longrightarrow \mathbb{C}$ prolongeant σ.

(b) Pour $x \in L$, montrer que si $\sigma_1(x) = \cdots = \sigma_n(x)$, alors $x \in K$.

Exercice 3. [Norme sur un corps de nombres]

Soit K un corps de nombres quelconque, on note N la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$ dans cet exercice.

(a) Pour tout $\alpha \in K$, montrer que $\alpha = 0 \iff N(\alpha) = 0$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_K$, montrer que $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que N est multiplicative et à valeurs entières sur $\mathcal{O}_K$, puis que les unités de $\mathcal{O}_K$ sont exactement les $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tels que $N(\alpha) = \pm 1$.

(c) Montrer que pour $\alpha \in \mathcal{O}_K$, si $N(\alpha)$ est un nombre premier, alors α est irréductible dans l'anneau $\mathcal{O}_K$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. [Corps quadratiques]

Dans tout cet exercice, d est un entier relatif sans facteur carré, différent de 0 et 1.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{d}$ et donner explicitement ses plongements dans $\mathbb{C}$.

(b) Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$, calculer la trace et la norme de $a + b\sqrt{d}$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, puis son polynôme minimal dans $\mathbb{Q}$.

(c) En déduire que l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, noté $\mathcal{O}_d$, est $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si d est congru à 2 ou 3 modulo 4, et $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si d est congru à 1 modulo 4.

(d) Déterminer $\mathcal{O}_d^*$ si $d < 0$. Sans preuve, que semble-t'il se passer pour $d > 0$? Etudier le cas $d = 2$.

(e) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour la norme usuelle, et calculer ses irréductibles.

(f) Pour $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que $\mathbb{Q}(j) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, puis trouver les unités de $\mathbb{Z}[j]$ et prouver qu'il est encore euclidien pour la norme.

(g) Montrer que $\mathcal{O}-5$ n'est pas factoriel.

(h) Montrer que tout corps de nombres de degré 2 est égal à un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et que ceux-ci sont non-isomorphes deux à deux.

Exercice 5.

Soit $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

(a) Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ puis le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

(b) Donner les valeurs des plongements complexes de K en α, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, puis les traces et normes (dans $K/\mathbb{Q}$) de ces nombres algébriques.

Exercice 6.

Soit $P(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P fixée et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Montrer que $\alpha P'(\alpha) = -(2a\alpha + 3b)$.

(b) Montrer que $2a\alpha + 3b$ est une racine de $\left(\frac{X-3b}{2a}\right)^3 + a\frac{X-3b}{2a} + b$, et en déduire $N_{K/\mathbb{Q}}(2a\alpha + 3b)$.

(c) Montrer que $\mathrm{disc}(\alpha) = -(4a^3 + 27b^2)$.

(d) Pour $a = b = -1$ ou $a = -1, b = 1$, montrer que $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est une base entière de $\mathcal{O}_K$.

Exercice 7. [Discriminant]

(a) Avec les notations et résultats de l'exercice 2, calculer $\mathrm{disc}(\mathcal{O}_d)$.

(b) Avec les notations et résultats de l'exercice 3, calculer $\mathrm{disc}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$.

(c) Soit K un corps de nombres de degré n, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ une base entière de $\mathcal{O}_K$ et $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ les plongements de K dans $\mathbb{C}$. Le discriminant de $\mathcal{O}_K$, noté D_K est le carré de $\det(\sigma_i(\alpha_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. On note P la contribution des permutations de signature paire à ce déterminant, et N la contribution des permutations de signature impaire, de sorte que $D_K = (P + N)^2$. Montrer que P et N sont en fait des entiers, et en déduire que D_K est congru à 0 ou 1 modulo 4 (théorème de Stickelberger).