Fractions continues
TD n°5 : Stabilité et convergence des fractions continues

On note d_C la distance cordale sur $\widehat{\mathbb{C}}$, définie par

$$d_C(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}},$$

et pour toutes homographies f, g on note

$$\sigma_0(f,g) = \sup_{z\in\widehat{\mathbb{C}}} d_C(f(z),g(z)), \quad \text{et} \quad L(f) = \sup_{z\neq w} \frac{d_C(f(z),f(w))}{d_C(z,w)}$$

Enfin, pour toute matrice M à coefficients complexes, on note $\|M\|$ la norme L^2 de ses coefficients.

Exercice 1. [Inégalités préliminaires] La première partie de cet exercice a pour but de montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$,

$$\sigma_0(h_M, I) \leq \sqrt{6}\|M - I\|. \tag{1}$$

On note $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ le groupe constitué des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

(a) Montrer que pour tout vecteur colonne X de taille 2 et toute matrice $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\|AX\| = \|X\|$.

(b) En déduire que pour toutes matrices M, M' de $M_2(\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$,

$$\|AMA^{-1} - AM'A^{-1}\| = \|M - M'\|.$$

(c) D'après l'exercice 2 du TD 4, les isométries pour la distance cordale sont les homographies associées aux matrices de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. En déduire qu'on peut supposer, pour montrer (1), que M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $|a| \leq 1 \leq |d|$.

(d) En utilisant les inégalités arithmético-géométriques et de Cauchy-Schwarz, en déduire (1).

(e) Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$,

$$1/\|M\|^2 \leq L(h_M) \leq \|M\|^2$$

et que pour toutes homographies f, g, h,

$$\sigma_0(fh, gh) = \sigma_0(f,g) \quad \text{et} \quad \sigma_0(hf, hg) \leq L(g)\sigma_0(f,g).$$

Exercice 2. [Stabilité explicite]

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'homographies, on note $F_n = f_1 \cdots f_n$, $G_n = g_1 \cdots g_n$ et $h_n = G_n F_n^{-1}$.

(a) Montrer que $\sigma_0(h_n^{-1}, h_{n+1}^{-1}) = \sigma_0(F_n g_{n+1}, F_n f_{n+1})$ pour tout n.

(b) En déduire que la suite des h_n converge si la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma_0(g_{n+1}, f_{n+1})}{\prod_{i=1}^n L(f_i)}$$

converge, et que pour la limite h, on a $\sigma_0(G_n, hF_n) \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$.

(c) Donner explicitement une suite de rayons (r_n) tels que pour toute suite (g_n) d'homographies avec $\sigma_0(f_n, g_n) \leq r_n$ et pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $(G_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(F_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(d) Appliquer ce résultat aux fractions continues 1-périodiques et 2-périodiques.

Exercice 3. [Formule du déterminant]

Pour des suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note A_n/B_n les convergentes successives (exprimées poynomialement en fonction des coefficients) et $K(a_n|b_n)$ leur limite si elle existe. On note également, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $t_n(z) = a_n/(b_n + z)$.

(a) Montrer que $A_1 = a_1$, $B_1 = b_1$, $A_2 = a_1 b_2$,$B_2 = b_1 b_2 + a_2$ et pour tout $n \geq 2$,

$$A_{n+1} = b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}, \quad B_{n+1} = b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}$$

et

$$t_1 \cdots t_n(z) = \frac{A_{n-1} z + A_n}{B_{n-1} z + B_n}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^n a_1 \cdots a_n.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, on s'intéresse aux fractions continues avec $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |b_n|$ converge.

(a) Soit $M = \max(|a_1|, |a_2|)$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$|A_n| \leq M(1 + |b_3|) \cdots (1 + |b_n|),$$

et en déduire que $|A_n|$ est bornée, et de même pour $|B_n|$.

(b) Montrer que les quatre suites de terme généraux respectifs A_{2n}, B_{2n}, A_{2n+1} et B_{2n+1} convergent vers des limites respectives A, B, A', B' telles que $AB' - A'B = 1$.

(c) En déduire que la fraction diverge.

(d) Montrer que la divergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |b_n|$ ne garantit pas la convergence de la fraction continue, en fournissant une famille de contre-exemples à l'aide du TD 4.

Exercice 5. [Images de demi-plans par des homographies]

Soit h une homographie.

(a) Expliquer pourquoi l'image par h d'un domaine déterminé par une inégalité de la forme $a\,\mathrm{Re}(z) + b\,\mathrm{Im}(z) \geq c$ est un domaine de cette forme ou bien un disque. (Faire des dessins de ces différents domaines, et penser l'image des bords).

(b) Pour $h(z) = (z - i)/(z + i)$, montrer que l'image par h du demi-plan défini par $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ est le disque unité.

(c) Pour b complexe avec $\mathrm{Re}(b) > 0$, montrer que l'image du domaine $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ par l'homographie $z \longmapsto 1/(z + b)$ est la boule de centre $1/2\,\mathrm{Re}(b)$ et de rayon $1/2\,\mathrm{Re}(b)$. Etudier le cas où b est imaginaire pur.

(d) En déduire que pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\mathrm{Re}\, b_1 > 0$ et $\mathrm{Re}\, b_n \geq 0$ pour tout n, si la fraction continue $K(1|b_n)$ converge, sa limite appartient à la boule de centre $1/(2\,\mathrm{Re}\, b_1)$ et de rayon $1/(2\,\mathrm{Re}\, b_1)$

Exercice 6. [Corollaires du théorème de Pringsheim]

Rappelons que le théorème de Pringsheim est le suivant : pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres complexes (jamais nuls à partir d'un certain rang), la fraction continue $K(a_n|b_n)$ converge si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \geq |a_n| + 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n/B_n| < 1$.

Nous allons ici admettre le théorème et en démontrer des corollaires.

(a) Supposons qu'il existe une suite de réels $r_n > 1$ tels que $|a_1/b_1| \leq 1 - 1/p_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n/b_n| < (p_n - 1)/(p_{n-1} p_n)$. Montrer que la fraction continue converge.

(b) (Worpitzky) Montrer que $K(a_n|1)$ converge si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq 1/4$. Donner un contre-exemple à ce résultat si on remplace $1/4$ par $c > 1/4$.

(c) Montrer que $K(1|b_n)$ converge si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{|b_{2n}|} + \frac{1}{|b_{2n-1}|} \leq 1$$