Fractions continues
TD n°4 : Fractions continues et applications de Möbius

On reprend les notations du TD précédent, avec $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et h_M l'homographie associée. On note $\mathcal{M}$ le groupe des homographies.

Exercice 1. [Transformations paraboliques, loxodromiques, hyperboliques]

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{tr}(M)^2$ détermine la classe de conjugaison de h_M avec h_M différente de l'identité.

(a) Montrer que si h_M est parabolique (c'est-à-dire $\mathrm{tr}\, M = \pm 2$), elle est conjuguée à $z \longmapsto z+1$.

(b) Montrer que si h_M est elliptique (c'est-à-dire $\mathrm{tr}\, M^2$ est un réel dans $[0, 4[$), elle est conjuguée à une rotation $z \longmapsto e^{i\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que si h_M est loxodromique (c'est-à-dire $\mathrm{tr}\, M^2 \notin [0, 4]$), elle est conjuguée à une application $z \longmapsto kz$ avec $k \neq 0, 1$.

(d) Montrer que si h_M est hyperbolique (c'est-à-dire $\mathrm{tr}\, M^2 \in [4, +\infty[$), elle est conjuguée à une application $z \longmapsto kz$ avec $k > 0, k \neq 1$.

On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = h_M(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{C}$ fixé.

(e) Montrer que si h_M est parabolique, la suite converge vers l'unique point fixe de h_M.

(f) Montrer que si h_M est elliptique, la suite est soit stationnaire (si u_0 est un des deux points fixes de h_M), soit périodique (et à valeurs dans un cercle-droite), soit dense dans un cercle-droite.

(g) Montrer que si h_M est loxodromique, la suite converge vers un des deux points fixes de h_M, et ce indépendamment du u_0 choisi au départ (sauf si c'est déja un point fixe).

(h) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ avec a non nul, on note h l'homographie définie par $h(z) = a/(b+z)$. Trouver une matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telle que $h_M = h$.

(i) Écrire en fonction de a et b quand la suite récurrente u_n associée (avec $u_0 = z$) converge, et vers quoi.

(j) En déduire que la fraction continue $K(\overline{a}|\overline{b})$ converge si et seulement si $-b^2/a \notin [0, 4[$, et donner la limite.

Exercice 2. [Isométries pour la distance cordale]

On cherche dans cet exercice à déterminer quelles sont les homographies qui sont des isométries pour la distance cordale, définie sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par

$$d_C(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

On pose h_M l'homographie associée à M avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour $z \neq w$,

$$\frac{d_C(h_M(z), h_M(w))}{d_C(z, w)} = \frac{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}{\sqrt{(|az + b|^2 + |cz + d|^2)(|aw + b|^2 + |cw + d|^2)}}.$$

(b) En supposant que h_M est une isométrie cordale et en passant à la limite avec $z \longmapsto 0$ et $w \longmapsto \infty$, montrer que

$$\begin{aligned} (|b|^2 + |d|^2)(|a|^2 + |c|^2) &= 1 \\ (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire que M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda\overline{b} & \lambda\overline{a} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et $\overline{\lambda}(|a|^2+|b|^2)=1$.

(d) En réutilisant le (b), prouver que $\lambda = 1$.

(e) Prouver finalement que M est une isométrie cordale si et seulement si elle est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

avec $|a|^2+|b|^2=1$.

Exercice 3. [Convergence uniforme et convergence en trois points]

Rappelons que $\mathcal{M}$ est muni de la métrique σ_0 de convergence uniforme associée à la distance cordale : autrement dit,

$$\sigma_0(f,g) = \sup_{z\in\widehat{\mathbb{C}}} d_C(f(z),g(z)).$$

et cette métrique rend $\mathcal{M}$ complet. On a de plus, pour toute matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$\sigma_0(h_M, \mathrm{Id}) \leq \sqrt{6}||M-I||$$

où $|| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} || = \sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}$.

Soit h_n une suite d'homographies telle que la suite $h_n(z)$ converge pour au moins trois valeurs différentes de z, et avec trois limites distinctes. On veut montrer qu'alors h_n converge dans $\mathcal{M}$.

(a) On suppose d'abord que la suite converge en 0, 1 et ∞ et la limite de la suite en chacun de ces points est elle-même. En définissant

$$f_n(z) = \frac{z-h_n(0)}{h_n(1)-h_n(0)}$$

montrer que $f_n \circ h_n$ provient d'une matrice de la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \quad \text{avec } a_n = c_n + d_n,\ \mathrm{Re}(d_n) \geq 0.$$

(b) Montrer que M_n tend coefficient par coefficient vers l'identité.

(c) En déduire que h_n converge dans $\mathcal{M}$ vers l'identité.

(d) Montrer le théorème dans le cas général.

Exercice 4. [Convergence d'un produit d'homographies]

Soit h_n une suite d'homographies telle que la série $\sum_n \sigma_0(s_n, I)$ converge.

(a) Montrer que la suite

$$\sum_n \sigma_0(s_n^{-1}\cdots s_1^{-1}, s_{n-1}^{-1}\cdots s_1^{-1})$$

converge. En déduire que la suite $(s_1\cdots s_n)^{-1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}$.

(b) Montrer que le produit $s_1\cdots s_n$ converge dans $\mathcal{M}$.

On représente maintenant chaque s_n par une matrice $A_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ plus proche de I que $-A_n$ et on note $P_n = A_1\cdots A_n$ et p_n l'homographie associée à P_n.

(c) Montrer que si la série des $\|P_n - P_{n-1}\|$ converge, alors la série des $\|A_n - I\|$ converge.

(d) Réciproquement, supposons désormais que la série des $\|A_n - I\|$ converge. Montrer que celle des $\sigma_0(p_n^{-1}, p_{n-1}^{-1})$ converge également.

(e) En déduire que la suite des p_n converge, vers une homographie que l'on note p.

(f) Prouver que la série des $\|P_n - P_{n-1}\|$ converge.