Fractions continues
TD n°1 : Développement en fractions continues

Dans toute cette feuille, les coefficients des fractions continues sont des entiers naturels, et non nuls hormis a_0.

Exercice 1. [Fractions continues de rationnels]
(a) Donner les développements en fractions continues de 8/7, 5/3, 541/87, et 1503/92. Que dire sur les quotients successifs ?
(b) Démontrer que le développement en fraction continue d'un rationnel est toujours fini.
(c) Quelle est la relation entre la fraction continue de p/q et celle de q/p ? En cas de doute, observer les exemples précédents.

Exercice 2. [Fractions continues de nombres quadratiques]
(a) En utilisant que $\sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Comparer la fraction obtenue après cinq étapes et $\sqrt{2}$, quel est le dégré de précision obtenu ?
(b) Soit ϕ le nombre d'or, c'est-à-dire la racine positive de $X^2 - X - 1$. Calculer les premières réduites du développement en fraction continue de ϕ, quels sont les numérateurs et dénominateurs qui apparaissent ? Donner le développement complet de ϕ.
(c) Plus généralement, montrer que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre dont la fraction continue est $[\overline{n}]$ est $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.

Exercice 3. [Formules de calcul des réduites et conséquences] On rappelle que pour une fraction continue $[a_0, a_1, \cdots]$, la n-ième réduite est la fraction $[a_0, \cdots, a_n]$ et la n-ième convergente est son expression sous forme de fraction irréductible p_n/q_n.
(a) Démontrer que $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$ et $q_1 = a_1$.
(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{array}{rcl} p_n & = & a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n & = & a_n a_{n-1} + q_{n-2} \end{array}$$

En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n = (-1)^n$$

et que pour tout $n \geq 2$,

$$q_n p_{n-2} - q_{n-2} p_n = (-1)^{n-1} a_n.$$

(d) En déduire que la suite des convergentes paires est strictement croissante, et que celle des convergentes impaires est strictement décroissante.
(e) Montrer que pour tout choix de coefficients $a_0, \cdots, a_n, \cdots$, la suite des convergentes converge vers un réel α tel que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

(d) On note, à n fixé, $r_k = [a_k, \cdots, a_n]$. Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a

$$[a_0, \cdots, a_n] = \frac{r_k p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Exercice 4. [Minoration des écarts aux convergentes]

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

(b) En déduire que pour tout irrationnel α, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

Exercice 5. [Optimalité des approximations par fractions continues] Soit a/b une fraction avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ et α un réel.

On dit que a/b est une approximation optimale (de second type) pour α si pour toute autre fraction c/d avec $d \leq b$, on a

$$|b\alpha - a| < |d\alpha - c|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que les approximations optimales de second type de α sont forcément parmi ses convergentes (questions (a), (b) et (c)), et réciproquement qu'à moins que $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, ses convergentes sont des approximations optimales ((d), (e), (f) et (g)).

(a) Montrer qu'une approximation optimale de second type pour α est aussi optimale de premier type, c'est-à-dire que pour toute autre fraction c/d avec $d \leq b$, on a

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{c}{d}\right|.$$

Montrer que $1/3$ et $1/5$ fournissent un contre-exemple de la réciproque.

Soit $[a_0, a_1, a_2 \cdots]$ le développement en fraction continue de α, dont on note p_n/q_n les convergentes, et a/b une approximation optimale de second type pour α.

(b) Démontrer que $a_0 \leq a/b \leq p_1/q_1$.

(c) Supposons que a/b n'est pas une convergente de α, soit $n \geq 2$ un entier tel que α est entre p_{n-1}/q_{n-1} et p_{n+1}/q_{n+1}. Montrer que $b > q_n$ puis que

$$|q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} |b\alpha - a|,$$

en déduire la contradiction.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto |y\alpha - x|$ avec x entier et y entier entre 1 et q_n.

(d) Soit y_0 le plus petit entier entre 1 et q_n tel qu'un couple (x, y_0) réalise le minimum de la fonction f. Supposons que deux couples distincts (x, y_0) et (x', y_0) réalisent ce minimum avec $x \neq x'$. Montrer qu'alors x et x' sont des entiers consécutifs et

$$\alpha = \frac{x + x'}{2y_0}.$$

(e) Montrer que cette fraction est sous sa forme irréductible, et en déduire que pour un certain entier m, $p_m = x + x'$, $q_m = 2y_0$. En déduire que $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ et $y_0 = 1$.

Ce cas exceptionnel étant écarté, nous pouvons donc maintenant supposer qu'il existe un unique x_0 tel que $f(x_0, y_0)$ est un minimum de f.

(f) En déduire que (x_0, y_0) est une approximation optimale de second type, donc de la forme (p_m, q_m) avec $m \leq n$.

Il reste à montrer que $m = n$ pour conclure que p_n/q_n est optimale.

(g) Supposer que $m < n$, et utiliser l'exercice précédent pour exhiber une contradiction. Conclure.