Fractions continues
Complément de correction du TD 5

La séance dernière, nous n'avons pas eu le temps de finir le calcul de la stabilité explicite pour une fraction continue 1-périodique, voici donc une façon naturelle et explicite (mais pas vraiment optimale en ce qui concerne les constantes employées) de procéder, pour les curieux. Les notations employées sont celles du TD 5.

Commençons par choisir deux complexes non nuls a et b, et l'homographie $f(z) = a/(z+b)$. C'est l'homographie associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a/\lambda \\ 1/\lambda & b/\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour un choix (fait une fois pour toutes) de λ tel que $\lambda^2 = -a$. On cherche à savoir, pour $\epsilon > 0$ petit, quelle boule autour de (a,b) en norme L^2 on peut choisir pour assurer que pour tout (a',b') dans cette boule et $g(z) = a/(z+b)$ associé, on ait

$$\sigma_0(f,g) \leq \epsilon.$$

Remarquons d'abord que $\sigma_0(f,g) = \sigma_0(fg^{-1}, I) \leq \sqrt{6}\|M'' - I\|$ avec

$$M'' = \begin{pmatrix} \frac{-a}{\lambda\lambda'} & 0 \\ \frac{b'-b}{\lambda\lambda'} & \frac{-a'}{\lambda\lambda'} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

avec $(\lambda')^2 = -a'$. En effet, M'' représente l'homographie $f \circ g^{-1}$. Il s'agit donc de contrôler la distance de cette matrice à I en fonction de a' et b' (pour un bon choix de λ'). On introduit la notation

$$\frac{a'}{a} = 1 + z$$

On peut toujours choisir une détermination de $\sqrt{1+z}$ de partie réelle positive, et alors pour cette détermination, on a

$$|\sqrt{1+z} - 1| \leq \frac{|z|}{|1 + \sqrt{1+z}|} \leq |z|.$$

On choisit dorénavant implicitement cette racine, pour définir $\lambda' = \lambda\sqrt{1+z}$. Alors,

$$\|M'' - I\| = \frac{1}{\lambda\lambda'} \left\| \begin{pmatrix} a + \lambda\lambda' & 0 \\ b' - b & a' + \lambda\lambda' \end{pmatrix} \right\|.$$

Or, on a

$$|\lambda\lambda'|^2 = |a||a'| = |a|^2|1+z|$$

On suppose à partir de maintenant que $|z| < \frac{1}{2}$ pour avoir $\frac{3}{2} \geq |1+z| \geq \frac{1}{2}$. Ensuite, on a

$$|a + \lambda\lambda'| = |a|(1 - \sqrt{1+z}| \leq |a||z|$$

et

$$|a' + \lambda\lambda'| = |a' - a| + |a + \lambda\lambda'| \leq \frac{5}{2}|a||z|.$$

donc, sous cette hypothèse, on a finalement

$$\|M'' - I\|^2 \leq \frac{9}{4}|a|^2 \left(|a|^2|z|^2 + |b' - b|^2 + \frac{25}{4}|a|^2|z|^2 \right)$$

ce qui, mis sous une forme plus simple mais avec approximation grossière, nous donne

$$\|M'' - I\| \leq 24|a||z|\|(a,b)\|$$

Ainsi, pour avoir $\sigma_0(f,g) \leq \epsilon$, il suffit donc d'avoir $24\sqrt{6}|a||z|\|(a,b)\| \leq \epsilon$.

En arrondissant encore un peu les estimations, on sait donc que si (a', b') est, pour la norme 2, dans la boule de centre (a, b) et de rayon $\epsilon/(60\|(a, b)\|)$, alors $\sigma_0(f, g) \leq \epsilon$.

Maintenant, pour conclure sur la stabilité explicite (exercice 2 du TD 4), on sait que la suite d'homographies g_n converge simultanément avec f^n si la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} L(f)^n \sigma_0(g_{n+1}, f)$$

converge. Ici, pour a, b fixé, on sait que $L(f) \leq \|M\|^2 \leq \frac{1}{|a|}(|a|^2 + |b|^2)$.

On choisit maintenant u_n le terme général d'une série convergente. Une famille de voisinages explicites pour la stabilité de la convergence est alors donnée, d'après l'estimation précédente, par les $g_n(z) = a_n/(z + b_n)$ tels que

$$\|(a_n, b_n) - (a, b)\| \leq \frac{|a|^n u_n}{60\|(a, b)\|^{2n+1}}$$

Comme on peut multiplier la série convergente par un coefficient sans changer la convergence, on peut en fait enlever le 60 dans la majoration ci-dessus : les termes importants sont les exposants en $|a|$ et $\|(a, b)\|$.