TD n°6 : Formes linéaires et dualité

Comme dans le cours, tout corps K est supposé commutatif.

Exercice 1. [Calcul de bases duales]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la base duale de la base $(1, X, \cdots, X^n)$ de $K_n[X]$.
2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de E et $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille de E^* telles que pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$,
$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}.$$
En déduire que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est une base de E^* et que ces bases sont duales.
3. Pour $(e_1, \cdots, e_n)$ une K-base de E, exprimer la base duale de $(e_1, e_1 + e_2, \cdots, e_1 + \cdots + e_n)$ en fonction de celle de $(e_1, \cdots, e_n)$.
4. Soient $(a_1, \cdots, a_n)$ des éléments tous distincts de K. On note, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\varphi_i \in K_{n-1}[X]^*$ définie par
$$\varphi_i(P) = P(a_i).$$
Montrer que les φ_i forment une base de $K_{n-1}[X]^*$, et calculer sa base antéduale dans $K_{n-1}[X]$.
5. Pour $a, b \in K$ distincts, montrer que les formes linéaires $P \mapsto P(a)$, $P \mapsto P'(a)$, $P \mapsto P(b)$, $P \mapsto P'(b)$ forment une base de $K_3[X]^*$, et calculer la base antéduale.

Exercice 2. [Formes linéaires sur $M_n(K)$]

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$.

1. Pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(K)$ dont le seul coefficient non nul est en (i, j) et vaut 1. On pose $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$, montrer que pour toute matrice M de $M_n(K)$,
$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$
En déduire que les formes linéaires de $M_n(K)$ sont exactement les formes linéaires de la forme $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$, où A parcourt $M_n(K)$.
2. En déduire que tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel (pouvant être de dimension infinie) et $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E.

1. Montrer que si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, alors
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi.$$
2. Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$. On pose $F = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i$. Montrer que E/F est de dimension finie.
3. Montrer que les formes linéaires φ_i et φ se factorisent sur E/F (on les notera $\overline{\varphi_i}$ et $\overline{\varphi}$ sur E/F).
4. Montrer que les $\overline{\varphi_i}$ engendrent $(E/F)^*$, et en déduire que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

5. Avec le même type d'argument, montrer que $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement si l'application $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) : E \to K^n$ est surjective.

Exercice 4. [Réduction d'endomorphismes]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de ${}^t u \in \mathrm{End}(E^*)$ est égal à χ_u, en déduire qu'il est également scindé.
2. En déduire que ${}^t u$ admet un vecteur propre dans E^*, puis que u admet un hyperplan stable dans E.
3. Prouver par récurrence que u est trigonalisable.
4. Supposons que pour un certain $r \in \{1, \cdots, \dim(E) - 1\}$, u laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension r de E. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 5. [Équations explicites d'un sous-espace vectoriel]

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d. Montrer qu'on peut écrire F comme l'intersection de $n - d$ hyperplans, mais pas moins.

   On travaille maintenant dans K^n. Rappelons que toute matrice $M \in M_{n,m}(K)$ s'écrit sous la forme
   $$M = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$
   avec $P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ et r le rang de M.
2. Déterminer des générateurs du noyau et de l'image de M en fonction de P et Q.
3. En considérant ${}^t M$, déterminer des équations du noyau et de l'image de M en fonction de P et Q.