TD 3 : Représentations linéaires des groupes finis

Les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie dans tout ce TD.

Exercice 1. [Espaces hermitiens]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. En adaptant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt au cas hermitien, montrer qu'il existe une base orthonormée $(e'_1, \cdots, e'_n)$ de E telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) = \mathrm{Vect}(e'_1, \cdots, e'_i).$$

(b) Appliquer la méthode pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$ (avec le produit hermitien usuel) à partir de la base $(5i, 5, 0), (1 + 2i, i + 2, 0), (3i + 2, 3 + 2i, 3)$.

Exercice 2.

Avec les définitions naturelles, à quoi correspondrait une représentation linéaire complexe du monoïde $\mathbb{N}$? Quelles seraient ses sous-représentations ?

Exercice 3. [Endomorphismes d'une représentation irréductible]

Soit V une représentation irréductible d'un groupe G sur un corps k. Montrer que $\mathrm{End}_G(V)$ est un corps non nécessairement commutatif. Que dire de plus si $k = \mathbb{C}$?

Exercice 4. [Représentations irréductibles de groupes abéliens]

Soit G un groupe fini.

(a) Si (V, ρ) est une représentation de G, montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est G-linéaire si et seulement si $\rho(g)$ commute avec tous les $\rho(h), h \in G$.

(b) Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations complexes irréductibles sont de dimension 1.

(c) *(Plus difficile)* Soit H un sous-groupe abélien de G. Montrer que les représentations complexes irréductibles de G sont de dimension inférieures ou égales à $[G : H]$.

Exercice 5. [Représentations de $\mathfrak{S}_3$]

Soit (V, ρ) une représentation complexe $\mathfrak{S}_3$. Notons $\tau = (123)$ et $\sigma = (12)$ dans $\mathfrak{S}_3$.

(a) Notons respectivement V_0, V_1 et V_2 les espaces propres de $\rho(\tau) \in GL(V)$ pour les valeurs propres $1, j$ et j^2 (où $j \in \mathbb{C}$ est une racine primitive troisième de l'unité). Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est égal à la somme directe $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.

(b) Montrer que V_0 est stable sous l'action de σ, que $\sigma \cdot V_1$ est inclus dans V_2 et que $\sigma \cdot V_2$ est inclus dans V_1.

(c) Montrer que pour tout $x \in V_1 \backslash \{0\}$, le sous-espace de V engendré par les vecteurs x et $\sigma \cdot x$ définit une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de x.

(d) En déduire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 6. [Un contre-exemple au théorème de Maschke si $k \neq \mathbb{C}$]

Notons $\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le morphisme de groupes défini par

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \ \rho(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Montrer que la représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ainsi définie n'est ni irréductible, ni somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 7. [La représentation standard]

Soit $n \geq 2$, on note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ a une représentation naturelle dans $\mathbb{C}^n$, définie par

$$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}.$$

(a) Donner une sous-représentation non triviale de $\mathbb{C}^n$.

On appelle représentation standard de $\mathfrak{S}_n$ la sous-représentation formée par l'hyperplan H de coordonnées

$$x_1 + \cdots + x_n = 0.$$

(b) Pour $x \in H$ non nul, notons V le sous-espace vectoriel de H engendré par les $\sigma \cdot x, \sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe i et j distincts tels que V contient $e_i - e_j$.

(c) En déduire que $V = H$ puis que la représentation standard est irréductible.

Exercice 8.

Soit V une représentation complexe de G dont la décomposition en représentations irréductibles est

$$V \cong V_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus n_r}$$

En utilisant le lemme de Schur, montrer que $\mathrm{End}_G(V) \simeq \prod_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C})$.

Exercice 9. [Représentations fidèles]

Soit G un groupe fini. Une représentation de G est *fidèle* si son noyau est trivial.

(a) Montrer que G admet une représentation fidèle.

(b) Soit (V, ρ) une représentation de G. Montrer que le noyau de V est constitué des $g \in G$ tels que $\mathrm{Tr}\, \rho(g) = \dim V$.

(c) Montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle, son centre est cyclique.

(d) Montrer que si H est distingué dans G et $(V, \overline{\rho})$ une représentation fidèle irréductible de G/H, la représentation (V, ρ) de G est irréductible de noyau H, avec ρ définie par $\rho(g) = \overline{\rho}(\overline{g})$.

Exercice 10. [Caractères abéliens d'un groupe]

Dans cet exercice, on note G un groupe fini et $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) On admet que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques. Montrer que pour tout groupe abélien, $\widehat{G}$ est isomorphe à G. Donner un contre-exemple si G n'est pas abélien.

(c) Si G est abélien, donner un isomorphisme canonique entre G et $\widehat{\widehat{G}}$.