TD n°2 : Théorèmes de Sylow

Dans tout le TD, sauf dans l'Exercice 3, tous les groupes sont supposés finis.

Exercice 1. [Petit théorème de Fermat]

Soient p un nombre premier et E un ensemble de cardinal a. On fait opérer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à gauche sur E^p par l'action

$$\overline{k} \cdot (e_1, \cdots, e_p) = (e_{\omega(k+1)}, \cdots, e_{\omega(k+p)}).$$

où $\omega(i)$ est le représentant dans $\{1, \cdots, p\}$ de la classe de i modulo p. En utilisant la formule des classes, montrer que $a^p \equiv a \mod p$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Centre d'un p-groupe]

Soient p un nombre premier et G un p-groupe, de cardinal p^α avec $\alpha \geqslant 1$.

1. On sait d'après le cours que le centre de G n'est pas trivial. Montrer par récurrence que G contient pour tout $i \in \{0, \cdots, \alpha\}$, un sous-groupe distingué d'ordre p^i.
2. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est toujours abélien.
3. Soit H un sous-groupe distingué non trivial de G. Montrer que l'intersection de H avec le centre de G est non-trivial.

Exercice 3. [Normalisateur] Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Soit $N_G(H) = \{g \in G | H = gHg^{-1}\}$. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H.
2. Montrer que H est distingué dans $N_G(H)$, et que ce dernier est le plus grand sous-groupe de G ayant cette propriété.
3. Montrer que si $N_G(H)$ est d'indice fini k dans G (i.e. $|G/N_G(H)| = k$ est fini), alors le nombre de conjugués de H dans G est exactement k.
4. Supposons que G est fini et soit S un p-Sylow de G. Montrer que n_p, le nombre de p-Sylow de G, est égal à l'indice de $N_G(S)$ dans G.

Exercice 4. [Exemples de Sylow]

1. Soit p un nombre premier. Trouver tous les p-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 200. [1]
3. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20 ?
4. Trouver tous les sous-groupes de Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
5. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et P_1 un p-Sylow de H. Montrer qu'il existe un p-Sylow P de G tel que $P_1 = P \cap H$.
6. Soient G un groupe et H un p-sous-groupe de G qui est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans tout p-Sylow de G.
7. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G qui contient un p-Sylow de G. Montrer que N possède autant de p-Sylow que G.
8. (Argument de Frattini) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et S un p-Sylow de H. Montrer que $G = N_G(S)H$.

1. Rappelons qu'un groupe est dit **simple** s'il ne contient aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

Exercice 5. [Les Sylow et les sous-groupes distingués]
Soit G un groupe.

1. Soit S un p-Sylow de G. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) S est l'unique p-Sylow de G;
   (b) S est distingué dans G;
   (c) S est stable par tout automorphisme de G (on dit que S est un sous-groupe *caractéristique* de G).
2. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que tout sous-groupe de Sylow de H qui est distingué dans H est en fait un sous-groupe distingué dans G.
3. Soient H un sous-groupe distingué de G et S un p-Sylow de G. Montrer que $H \cap S$ est un p-Sylow de H et que SH/H est un p-Sylow de G/H.
4. Soient H un sous-groupe de G et S un p-Sylow de G. Montrer que $H \cap S$ n'est pas toujours un p-Sylow de H.
5. Soit S un p-Sylow de G.
   (a) Montrer que si S' est un p-Sylow de G tel que $S' \subset N_G(S)$, alors $S = S'$.
   (b) Montrer que $N_G(N_G(S)) = N_G(S)$.
6. Supposons que G possède un unique p-Sylow. Montrer que il en est de même pour tout sous-groupe et tout quotient de G.

Exercice 6. Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$.

1. Montrer que tout groupe d'ordre pq possède un q-Sylow distingué.
2. Montrer que si de plus p ne divise pas $q-1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q possède un sous-groupe de Sylow distingué.
4. Soit $r > q$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre pqr possède un r-Sylow distingué.

Exercice 7. [Applications du théorème de Sylow]

1. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que soit G possède un 3-Sylow distingué, soit G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
2. Soit G un groupe d'ordre 56. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
3. Soit G un groupe d'ordre 351. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
4. Soit G un groupe d'ordre 340. Montrer que G possède un sous-groupe cyclique distingué d'ordre 85.
5. Soit G un groupe d'ordre 48. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16.
6. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Calculer le nombre d'éléments d'ordre 7.

Exercice 8. Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est d'indice $\geqslant 5$ dans G.
   Indication : si H est un sous-groupe de G, considérer l'action de G sur G/H.
2. Montrer que le nombre de 2-Sylow dans G vaut 5 ou 15.
3. Supposons que G possède exactement 15 2-Sylow. Montrer que G possède deux 2-Sylow d'intersection non triviale H. Montrer que $N_G(H)$ est d'indice 5 dans G.
4. Montrer que dans tous les cas G possède un sous-groupe d'indice 5. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.